

Uwe Risto

**Zur Charakterisierung und Anwendung des
Durchschlagverhaltens von nachgiebigen
rotationssymmetrischen Strukturen**

Berichte der Ilmenauer Mechanismentechnik (BIMT)

Herausgegeben von

Prof. Lena Zentner

Fachgebiet Mechanismentechnik an der TU Ilmenau

Band 3

**Zur Charakterisierung und Anwendung
des Durchschlagverhaltens von
nachgiebigen rotationssymmetrischen
Strukturen**

Uwe Risto



Universitätsverlag Ilmenau
2013

Impressum

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Angaben sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Diese Arbeit hat der Fakultät für Maschinenbau der Technischen Universität Ilmenau als Dissertation vorgelegen.

Tag der Einreichung:	21. Dezember 2012
1. Gutachter:	apl. Prof. Dr.-Ing. habil. Lena Zentner (Technische Universität Ilmenau)
2. Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. Antal Huba (Technische und Wirtschaftswissenschaftliche Universität Budapest)
3. Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. habil. Emil Kolev (Fachhochschule Schmalkalden)
Tag der Verteidigung:	24. Juli 2013

Technische Universität Ilmenau/Universitätsbibliothek

Universitätsverlag Ilmenau

Postfach 10 05 65

98684 Ilmenau

www.tu-ilmenau.de/universitaetsverlag

Herstellung und Auslieferung

Verlagshaus Monsenstein und Vannerdat OHG

Am Hawerkamp 31

48155 Münster

www.mv-verlag.de

ISSN 2194-9476 (Druckausgabe)

ISBN 978-3-86360-074-7 (Druckausgabe)

URN urn:nbn:de:gbv:ilm1-2013000467

Inhalt

Inhalt	v
Danksagung	ix
Zusammenfassung	x
Summary	xi
1 Einleitung	1
2 Grundlagen	4
2.1 Nachgiebige Strukturen	4
2.1.1 Einteilung nachgiebiger Strukturen	6
2.1.2 Statisch-mechanisches Verhalten nachgiebiger Strukturen	7
2.2 Mechanischer Durchschlageffekt	12
2.3 Grundlagen des statisch-mechanischen Verhaltens einer Rotationsschale unter Druckbelastung	15
2.4 Stand der Forschung und Technik zum mechanischen Durchschlageffekt an rotationssymmetrischen Strukturen	24
2.4.1 Stand der Forschung	24
2.4.2 Stand der Technik	28
2.5 Berechnung von nichtlinearen Problemstellungen mit der Finite-Elemente- Methode	32
2.5.1 Lösungsverfahren	33
2.5.2 NEWTON-RAPHSON-Verfahren	34
2.5.3 Bogenlängenverfahren	36
2.6 Das MOONEY-RIVLIN-Materialmodell	40
3. Untersuchung des Durchschlagverhaltens von sphärischen Strukturen	43
3.1 Das FEM-Modell	43

3.2 FEM-Berechnungen und deren Auswertung.....	45
3.2.1 Zusammenhang zwischen den kritischen Lasten und den geometrischen Abmessungen der untersuchten sphärischen Strukturen.....	46
3.2.2 Durchschlagcharakteristik in Abhängigkeit von den geometrischen Abmessungen der untersuchten sphärischen Strukturen.....	51
3.2.3 Verschiebung des Scheitelpunktes bei anliegender kritischer Last in Abhängigkeit von den geometrischen Abmessungen der untersuchten sphärischen Strukturen	55
3.2.4 Untersuchung des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens	58
3.3 Vergleich des Verformungs-Dehnungs-Verhaltens von sphärischen Strukturen bei anliegender kritischer Last unter der Nutzung von zwei Modellierungs- methoden	63
3.4 FEM-Berechnung und Auswertung eines 3D-Modells	72
3.5 Zusammenfassung	81
4 Vergleich des Durchschlagverhaltens verschiedener rotationssymmetrischer Strukturen	85
4.1 Grundgedanke und Zielstellung des Formvergleichs.....	85
4.2 Berechnungsergebnisse für verschiedene rotationssymmetrische Strukturen.....	87
4.2.1 Sphärische Struktur	87
4.2.2 Kegelstruktur.....	90
4.2.3 Parabolische Struktur	94
4.3 Vergleich der Berechnungsergebnisse	97
4.3.1 Modell 1	97
4.3.2 Modell 2	100
4.4 Zusammenfassung	102
5 Experimentelle Verifikation der FEM-Untersuchungen von sphärischen Strukturen .	104
5.1 Messung des kritischen Druckes und der Verschiebung im Scheitelpunkt.....	104

5.1.1	Aufbau des Messstandes	104
5.1.2	Messergebnisse	107
5.2	Visualisierung des Verformungsverhaltens von sphärischen Strukturen unter Druckbelastung	111
5.2.1	Aufbau des Messstandes	111
5.2.2	Ergebnisse der Hochgeschwindigkeitsaufnahmen.....	112
5.3	Ergebnisdiskussion.....	113
5.4	Zusammenfassung	119
6	Anwendung des Durchschlageffektes in Ventilapplikationen	120
6.1	Druck- und temperaturgesteuertes Entlüftungsventil für Solarthermieranlagen..	120
6.1.1	Funktionsweise von Solarthermieranlagen	120
6.1.2	Problemstellung	122
6.1.3	Lösungsansatz	122
6.1.4	Vorbetrachtungen der Randbedingungen zur Auslegung des Funktionselementes	124
6.1.5	Gestaltung des Funktionselementes mithilfe von FEM-Berechnungen	127
6.1.6	Ergebnisse des Modells mit Einschränkung auf rotationssymmetrisches Verhalten (Modell 1)	129
6.1.7	Ergebnisse des Modells in 3-dimensionaler Betrachtungsweise (Modell 2)	130
6.1.8	Spannungs-Dehnungs-Vergleich zwischen den untersuchten Modellen...	131
6.1.9	Berechnung der Volumenänderung	132
6.1.10	Experimentelle Überprüfung der Simulationsergebnisse	133
6.2	Katheter- und Harnwegventil	138
6.2.1	Lösungsansatz	139
6.2.2	Gestaltung des Ventils mithilfe von FEM-Simulationen.....	140

6.2.3 Experimentelle Überprüfung der Simulationsergebnisse für die ausgewählte Ventilgeometrie	147
6.3 Sensor-Aktor-Element.....	148
7. Zusammenfassung	151
Abkürzungsverzeichnis	xiii
Verwendete Formelzeichen.....	xiv
Literaturverzeichnis.....	xviii
Anhang A	xxvi
Anhang B	xxx

Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand in Zusammenarbeit mit dem Fachgebiet Mechanismentechnik der Technischen Universität Ilmenau.

Mein besonderer Dank gilt Frau apl. Professor habil. Dr.-Ing. Lena Zentner. Insbesondere für die wissenschaftliche Betreuung und dass Sie mir die Möglichkeit gab, bei ihr diese Arbeit zu verfassen. Zudem möchte ich mich für die langjährige Unterstützung und die überaus angenehme Zusammenarbeit recht herzlich bedanken. Für die Erstellung des zweiten und dritten Gutachtens möchte ich mich bei Prof. Dr.-Ing. Antal Huba und Prof. Dr.-Ing. habil. Emil Kolev bedanken. Prof. Dr.-Ing. Antal Huba danke ich zudem für die zahlreichen, äußerst angenehmen Aufenthalte in Budapest.

Den Kollegen des Fachgebietes Mechanismentechnik möchte ich für die fachliche Unterstützung danken. Insbesondere danke ich Herrn René Uhlig für die Hilfe beim Aufbau von Versuchsständen und bei der Durchführung und Auswertung von Experimenten. Weiterhin möchte ich den Kollegen vom Fachgebiet Fertigungstechnik für die Fertigung zahlreicher Bauteile danken. Ein weiterer Dank gilt der Firma AZ Gastechnik für die kreative Zusammenarbeit.

Abschließend möchte ich mich für die langjährige und geduldige Unterstützung meiner Familie bedanken. Ein besonderer Dank gilt meiner Frau Swetlana und meinen Kindern.

Erfurt, September 2013

Uwe Risto

Zusammenfassung

Instabiles Verhalten von festen und nachgiebigen Strukturen wird in den meisten Fällen der technischen Anwendung vermieden. Dennoch kann das instabile Verhalten von nachgiebigen Strukturen in Form von Durchschlag positiv eingesetzt werden. Das Durchschlagverhalten stellt eine sprunghafte Änderung von einem Gleichgewichtszustand in einen anderen dar.

In der vorliegenden Arbeit werden signifikante Eigenschaften des instabilen Verhaltens in Form von Durchschlag beschrieben. Dies wird am Beispiel einer sphärisch geformten Struktur, und anderen, durchgeführt. Des Weiteren wird das Verhalten der Strukturen unter einem gleichmäßigen Außendruck und unter Berücksichtigung eines nichtlinearen elastischen Materials untersucht. Ergänzend werden die ermittelten Ergebnisse experimentell überprüft.

Die Forschungsergebnisse fließen anschließend in die Entwicklung von innovativen Ventilsystemen für beispielsweise solarthermische Anlagen.

In solarthermischen Anlagen müssen für deren sichere und effiziente Funktion die durch Ausgasung aus dem Solarfluid anfallenden Gase regelmäßig aus dem System abgeleitet werden.

Im Rahmen dieser Arbeit soll die Entwicklung eines neuartigen Funktionselementes für Ventilanwendungen erläutert werden, der eine regelmäßige und vollkommen autonome Entlüftung solarthermischer Anlagen ermöglicht. Die Besonderheit dieser Innovation besteht darin, dass das Funktionselement keine externe Energieversorgung benötigt und dass auf Steuerungselektronik und Sensorik verzichtet werden kann. Die Neuentwicklung beruht auf den mechanischen Eigenschaften einer partiellen Nachgiebigkeit eines Körpers aus hochelastischem Material und nutzt die vorhandene Wärmeenergie des Betriebsmediums in einer solarthermischen Anlage.

Die erzielten Forschungsergebnisse werden weiterhin für die Entwicklung eines Ventilsystems für medizinische Anwendungen eingesetzt. Bei dem medizinischen Ventilsystem handelt es sich um eine Struktur die es ermöglichen soll, in Form eines Implantates, Inkontinenzpatienten die Unannehmlichkeiten ihrer Krankheit zu überwinden.

Summary

Instable behaviour of rigid and compliant structures is in most cases of technical applications an attribute which have to be avoided. Nevertheless instable behaviour of compliant structures can be used positively in form of a snap-through. An abrupt change will take place in case of a snap-through from a state of equilibrium to another state. The critical load complies with two or more states of equilibrium.

The article will show the significant attributes of instable behaviour in form of a snap-through. This will be illustrated by the example of a spherical shaped structure. In consideration of nonlinear material characteristics, the behaviour of such structures under pressurisation against geometrical properties was researched. In addition, the obtained results are experimentally verified.

The research results were used in the development of innovative valve systems for example, solar heat installations.

In solar heat installations the by outgassing from the solar fluid emitted gases has to be discharged from the system in continuous periods to guarantee whose secure and efficient function.

In line with this work the development of a novel function element for valve applications shall be illustrated, which allows a regularly and completely stand-alone de-airing of solar heat installations. The special feature of this innovation is that the function element does not need an external power supply and that there is no need for control electronic and sensor systems. The redevelopment is based on the mechanical properties of a high elastic material body with a partial compliance and uses the existing thermal energy of the operating medium in a solar heat installation.

The research findings will be used for the development of a valve system for medical applications. The medical valve system is a structure which is to make it possible to overcome, in the form of an implant, incontinent patients the inconvenience of their disease.

1 Einleitung

Der Einsatz von nachgiebigen Strukturen hat in den letzten Jahrzehnten enorm an Bedeutung hinzu gewonnen. So werden beispielsweise Strukturen aus gummielastischen Materialien aufgrund ihres Verformungsverhaltens in einem breiten Bereich der Automobilindustrie, Medizintechnik oder Ventiltechnik eingesetzt. Der Vorteil von nachgiebigen Strukturen aus gummielastischen Materialien besteht unter anderem darin, dass sie die Erzeugung von neuartigen Bewegungsabläufen und Verformungen ermöglichen. Daher gewinnt die methodische Anwendung von nachgiebigen Strukturen immer mehr an Zuspruch und Akzeptanz.

Durch die Nutzung gummielastischer Materialien werden mechanische Eigenschaften wieder aufgegriffen, welche unter der Nutzung von linear elastischen Materialien stark begrenzt zur Anwendung kamen. So stellen Instabilitäten in Form von Bifurkation (Verzweigung) und mechanischem Durchschlag Phänomene dar, welche im technischen Bereich überwiegend vermieden werden. In verschiedenen Nischenprodukten wie zum Beispiel bei Kinderspielzeugen in Springfröschen findet der Vorgang des mechanischen Durchschlages jedoch Anwendung. Der Durchschlageffekt kann unter der Nutzung gummielastischer Materialien beispielsweise in Ventilapplikationen eingesetzt werden.

Die Untersuchung des Stabilitätsproblems von rotationssymmetrischen gekrümmten Strukturen, zum Beispiel in sphärischer Form wie Kalotten und Kuppeln, unter Druckbelastung wurde unter dem Einsatz von allgemeinen linear und ideal elastischen Materialien weitgreifend durchgeführt. In der Baustatik zum Beispiel sind die Eigenschaften von rotationssymmetrischen gekrümmten Strukturen bis zu einer definierten kritischen Last, zum Beispiel der maximal zulässigen Schneelast, interessant. Das Überschreiten einer kritischen Last führt im Allgemeinen zu großen Verformungen. Diese Verformungen können aufgrund der eingesetzten Materialien eine plastische Verformung der untersuchten Struktur bedeuten, oder es kommt im ungünstigsten Fall zur Zerstörung der Struktur durch Bruch.

Die Anwendung gummielastischer Werkstoffe erlaubt es, neue Anwendungsfelder zu erschließen. Aufgrund der Eigenschaft, dass gummielastische Werkstoffe über eine hohe

Elastizität verfügen, können kritische Lasten und das nachkritische Verhalten sinnvoll nutzbar gemacht werden.

Durch den Einsatz neuartiger Materialien ist es jedoch notwendig, bisherige scheinbar abgeschlossene Forschungsfelder wieder aufzugreifen und durch neue weiterführende Untersuchungen zu ergänzen. Daher wird in der vorliegenden Arbeit das mechanische Durchschlagverhalten von den beschriebenen Strukturen - aber aus einem nichtlinear elastischen Werkstoff - untersucht und experimentell überprüft. Nichtlinear elastische Werkstoffe lassen sich nur unter enormem Aufwand analytisch beschreiben. Daher wird in dieser Arbeit für die Untersuchungen die softwaregestützte Finite-Elemente-Methode (FEM) angewendet.

Das Ziel der Forschungsarbeit ist es, das Durchschlagverhalten von verschiedenen rotationssymmetrischen Strukturen aus einem nichtlinear elastischen Material unter gleichmäßig verteilter Druckbelastung zu untersuchen und zur Anwendung zu bringen. Durch die Untersuchungen werden die Durchschlaglasten und die Verformungseigenschaften von den betrachteten Strukturen unter statischer Betrachtungsweise ermittelt und mit den geometrischen Abmessungen der Strukturen in Zusammenhang gebracht und charakterisiert. Ein weiteres Ziel ist die praktische Überprüfung der theoretisch ermittelten Ergebnisse und der Vergleich mit bestehenden Forschungsarbeiten, um die Relevanz und Effizienz der Modellierungsmethoden für die untersuchten Fälle zu überprüfen. Zum Abschluss der Arbeiten fließen die Schlussfolgerungen aus den Ergebnissen in die Entwicklung innovativer Anwendungsfelder und Produkte ein.

Nach der Einleitung im 1. Kapitel wird im 2. Kapitel zunächst der bisherige Stand der Forschung und Technik zum mechanischen Durchschlagverhalten von rotationssymmetrischen gekrümmten Strukturen dargestellt. Zudem werden eine kurze Einführung in den Wissenschaftsbereich der nachgiebigen Strukturen, in die Grundlagen der Statik einer Rotationsschale sowie die Berechnungsmethoden zur Lösung von Stabilitätsproblemen mit der FEM vorgenommen.

Anschließend werden im 3. Kapitel umfangreiche FEM-Berechnungen zum mechanischen Durchschlagverhalten von rotationssymmetrischen gekrümmten Strukturen aus einem nichtlinear elastischen Material unter Druckbelastung durchgeführt und ausgewertet. Ergänzend werden Möglichkeiten zur Reduzierung des Berechnungsaufwandes ge-

prüft, bei der zum einen das Materialmodell eines nichtlinear elastischen Werkstoffes durch das eines linear ideal elastischen Werkstoffes ersetzt wird. Zum anderen wird geprüft in wieweit die Nutzung von bekannten analytischen Gleichungen aus der linearen Schalentheorie erfolgen kann, um das Verformungsverhalten von den untersuchten Strukturen bis zum Erreichen einer kritischen Last abzubilden. Während der Prüfung der Vereinfachung des Materialmodells und der Nutzung der linearen Schalentheorie werden die Dehnungen und Verformungen aus den FEM-Simulationen mit denen aus den analytischen Berechnungen verglichen.

Das 4. Kapitel befasst sich mit dem Vergleich des Durchschlagverhaltens von drei verschiedenen Rotationskörpern. Das Ziel des Vergleiches ist, den Einfluss der Form des Rotationsquerschnittes der untersuchten Strukturen auf das qualitative Verhalten zu ermitteln.

Mit Abschluss der Untersuchungen werden im 5. Kapitel die anhand der Berechnungen gewonnen Ergebnisse mithilfe eines Versuchsaufbaus überprüft. Die Experimente beinhalten die Bestimmung der Durchschlaglasten von verschiedenen rotationssymmetrischen sphärisch gekrümmten Strukturen für unterschiedliche geometrische Abmessungen. Zudem wird das Verformungsverhalten der Strukturen ermittelt.

Aus den gewonnenen Forschungsergebnissen in den Kapiteln 3 bis 5 können verschiedene Schlussfolgerungen abgeleitet werden. Auf Grundlage der Schlussfolgerungen wird im 6. Kapitel ein neuartiges Entlüftungsventil für Solarthermianlagen vorgestellt und die Entwicklung in seinen Grundzügen erläutert. Ergänzend wird der Einsatz von Strukturen mit Durchschlagcharakteristik in der Medizintechnik, speziell im Bereich der Urologie, anhand von grundlegenden Simulationen und praktischen Experimenten überprüft.

Zum Abschluss der Arbeit erfolgen eine Zusammenfassung der Ergebnisse und ein Ausblick auf weitere Forschungsarbeiten und mögliche Anwendungen.

2 Grundlagen

2.1 Nachgiebige Strukturen

Nachgiebige Strukturen sind aus unserem technologiegeprägten Alltag nicht mehr wegzudenken. Sie werden in unzähligen technischen Systemen eingesetzt. Die Erforschung und Entwicklung von nachgiebigen Elementen oder gar ganzen Mechanismen führt dazu, dass diese gezielt als Teil von komplexen Systemen genutzt werden, wodurch beispielsweise neuartige Bewegungen und Funktionen realisiert werden können. Aus diesem Grund kann dem Fachgebiet der *nachgiebigen Mechanismen und Strukturen (compliant mechanism and structures)* eine immer größer werdende Bedeutung zugeordnet werden. Nicht zuletzt ist der Drang nach neuen hoch innovativen und intelligenten technischen Lösungen ein enormer Anreiz zur Erschließung und Vertiefung unkonventioneller Methoden.

Unter der Kategorie *nachgiebige Strukturen* werden Einzelteile oder gesamte Systeme eingeordnet, deren Bewegungsvermögen und Funktion ausschließlich oder aber auch nur zum Teil auf definierten elastischen Deformationen von Strukturteilen beruhen. Ihre Funktionen und Eigenschaften werden also erst durch das Vorhandensein elastischer nachgiebiger Strukturteile möglich [Bögelsack 1996].

Ein Vorteil nachgiebiger Strukturen ist unter anderem deren einfache Miniaturisierbarkeit. Des Weiteren sind mit solchen Strukturen ein geringer Montageaufwand und eine gute wirtschaftliche Herstellbarkeit erzielbar, da diese Strukturen beispielsweise aus einem einzelnen Bauteil bestehen können, das eine bestimmte Funktion durch strukturelle Formgebung ermöglicht. Zudem sind komplexe Bewegungsabläufe realisierbar und sie erlauben die Integration von unkonventionellen Antrieben und Sensoren in ein gesamtes System. Weiterhin können durch nachgiebige Strukturen die Masse reduziert, die Zuverlässigkeit gesteigert und der Wartungsaufwand verringert werden [Howell 2001, Böhm 2006].

Als Nachteile sind zu nennen, dass nachgiebige Strukturen eine komplexe und aufwendige Berechnung bzw. Entwicklung benötigen und auftretende Schwingungen in erhöhtem Maße berücksichtigt werden müssen. Zudem kommt es zur Umwandlung von kinetischer

Energie in Wärmeenergie im Material der nachgiebigen Segmente. Des Weiteren ist bei einem Defekt der nachgiebigen Struktur ein Austausch der gesamten Struktur nötig, da eine Wartung von nachgiebigen Elementen stark eingeschränkt möglich ist.

Die elastische Verformbarkeit nachgiebiger Strukturen kann unter anderem für solche Aufgaben eingesetzt werden, bei denen hohe Anforderungen an die Sicherheit gestellt werden.

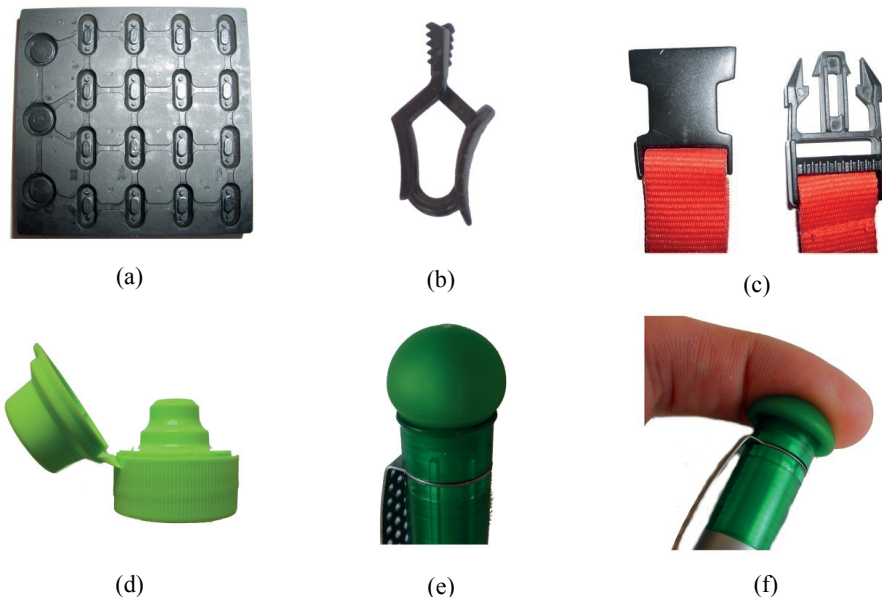


Abbildung 2.1: Nachgiebige Strukturen aus dem alltäglichen Gebrauch: (a) - Tastenmatte einer Fernbedienung (Rückseite), (b) – Klammer, (c) - Klickverschluss für Bänder (z. B. an Handtaschen oder Rucksäcken), (d) - Verschluss einer Trinkflasche, (e) - Kugelschreiber mit elastischer Abdeckung des Druckknopfes, (f) - Kugelschreiber mit elastischer Abdeckung des Druckknopfes bei Betätigung

Nachgiebige Strukturen werden im Alltäglichen z. B. als Tastaturmatten in Fernbedienungen eingesetzt, Abbildung 2.1. Die Tasten nehmen die Druckkraft des Bedieners auf und übertragen diese direkt auf die Elektronik der Fernbedienung. Wird die Taste wieder entlastet, so unterbricht die Struktur die Verbindung zur Elektronik. Die beschriebenen Tasten sind nicht extra mechanisch gelagert oder geführt bzw. benötigen keine zusätzlichen mechanischen Komponenten, wie Federn oder Rückstellglieder, um ihre Funktion

zu erfüllen. Durch den Einsatz von gezielter Nachgiebigkeit werden alle nötigen Funktionen in einem Element vereint und zur Verfügung gestellt.

2.1.1 Einteilung nachgiebiger Strukturen

Nachgiebige Strukturen werden zunächst in zwei Arten eingeteilt. Zum einen in Strukturen, die die Umwandlung einer beliebigen Eingangsenergie in (meistens) mechanische Energie ermöglichen und somit als *Aktuatoren* bezeichnet werden, und zum anderen in *Getriebe*, bei denen die nachgiebigen Teile eine relative Bewegung von Gliedern zueinander erlauben. Weiterhin führt die relative Bewegung der Glieder zu einer Übertragung der Eingangsenergie.



Abbildung 2.2: Einteilung nach Art der Struktur [Zentner 2005]

In Abbildung 2.3 sind Getriebe nach der in Abbildung 2.2 gegebenen Einteilung dargestellt. Die Funktion des in Abbildung 2.3 (a) dargestellten Mechanismus wird durch einen Aktuator, der mithilfe eines Getriebes aus nachgiebigen Strukturen eine Hubsteigerung erzielt, realisiert. Die nachgiebige Struktur in (b) realisiert eine Greiferfunktion. Bei dieser Struktur wird der breite vertikale Balken fest eingespannt und über den T-förmigen Stempel eine Kraft eingeleitet, die von den nachgiebigen Getriebestrukturen übertragen wird. Der 4-Balken-Mikromechanismus im Beispiel (c) stellt eine Getriebestruktur in der Art eines Koppelgetriebes dar und ähnelt einer Kurbelschwinge. Das Beispiel (d) stellt wieder einen Greifer-mechanismus dar, der auf ähnliche Art und Weise wie der Greifer-mechanismus aus Beispiel (b) funktioniert.

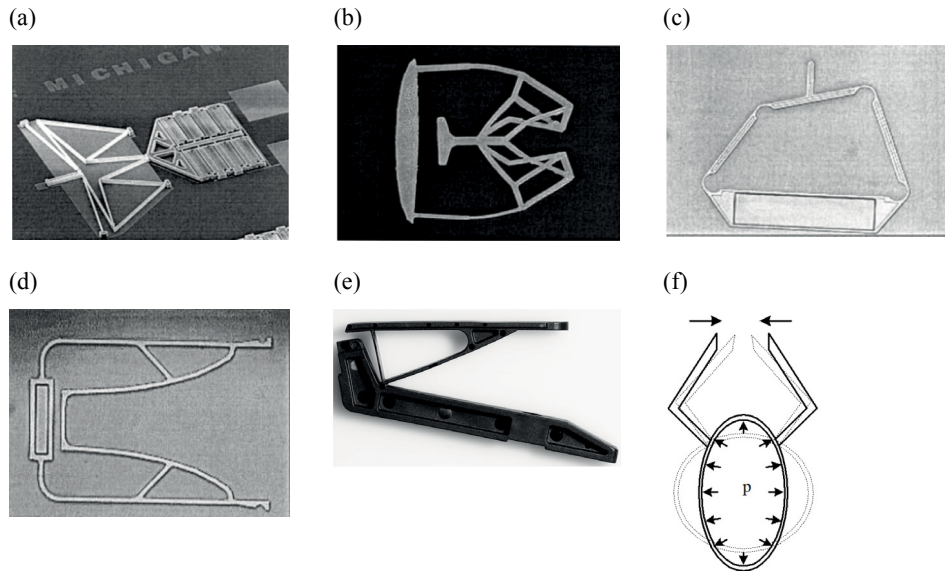


Abbildung 2.3: (a) elektrostatischer Aktuator mit Hubsteigerung und fixierter verteilter Nachgiebigkeit; (b) nachgiebiger Greifer mit fixierter verteilter Nachgiebigkeit; (c) nachgiebiger 4-Balken-Mikromechanismus mit fixierter konzentrierter Nachgiebigkeit; (d) nachgiebiger Greifermechanismus mit fixierter verteilter Nachgiebigkeit [Kota 2001]; (e) nachgiebiger Mechanismus für Hebelkinematik mit fixierter konzentrierter Nachgiebigkeit [Monolitix 2012]; (f) nachgiebiger Mikrogreifer mit ellipsenförmiger Rahmenstruktur und fixierter verteilter Nachgiebigkeit [Bögelsack 1996]

Der monolithische Mechanismus in Abbildung 2.3 (e) zeigt, wie durch gezielten Einsatz von nachgiebigen Strukturen eine Hebelkinematik umgesetzt werden kann, die aus einem Bauteil besteht. Dies hat den Vorteil, dass keine Einzelteilmontage erfolgen muss, was wiederum zur Kostensenkung führt. Das Beispiel (f) zeigt einen Greifermechanismus, der sich über eine Druckbelastung oder eine Krafteinleitung öffnen und schließen lässt.

Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt bei nachgiebigen Strukturen, die in die Gruppe der Aktuatoren laut der Einteilung in Abbildung 2.2 eingeordnet werden. Daher werden im nächsten Abschnitt verschiedene Strukturen und deren grundlegendes statisch-mechanisches Verhalten vorgestellt und erläutert.

2.1.2 Statisch-mechanisches Verhalten nachgiebiger Strukturen

Das statisch-mechanische Verhalten nachgiebiger Strukturen kann zunächst in stabiles und instabiles Verhalten eingeteilt werden. Diese gliedern sich wiederum in jeweils zwei Unterkategorien, siehe Abbildung 2.4. Das stabile Verhalten wird in monotonen und in Verhalten mit Richtungsumkehr gegliedert. Instabiles Verhalten wird in Bifurkation und Durchschlag unterteilt. In den dargestellten Kurven ist der Druck in Abhängigkeit von der Verschiebung aufgetragen. Demgegenüber werden in der vorliegenden Arbeit nachgiebige Strukturen gezeigt und untersucht bei denen die Verschiebung in Abhängigkeit des anliegenden Druckes ermittelt wird. Da die Darstellung der Last in Abhängigkeit der Verschiebung in Abbildung 2.4 besser zum Verständnis beiträgt, wird im weiteren Verlauf der Arbeit diese Form angewendet.

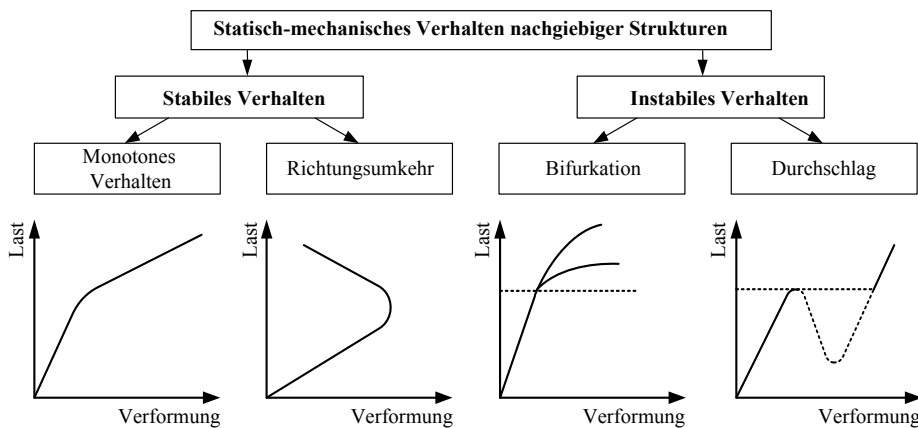


Abbildung 2.4: Einteilung des statischen Verhaltens von Strukturen mit fixierter Nachgiebigkeit [Zentner 2008]

Stabiles monotonen Verhalten ist durch einen eindeutigen und gleichsinnigen Zusammenhang zwischen der anliegenden Belastung und der resultierenden Verformung gekennzeichnet. In Abbildung 2.5 ist ein Beispiel für monotonen stabiles Verhalten einer nachgiebigen Struktur dargestellt. Diese Struktur ist ein nachgiebiger Mechanismus nach HÖCKEN mit Kerb gelenken und besteht aus einem elastischen Material. Der Mechanismus wird über eine Last in Bewegung versetzt. Die Bewegung des Punktes *P* in Abbildung 2.5 erfolgt geradlinig und horizontal, siehe FEM-Modell Abbildung 2.5, rechts.

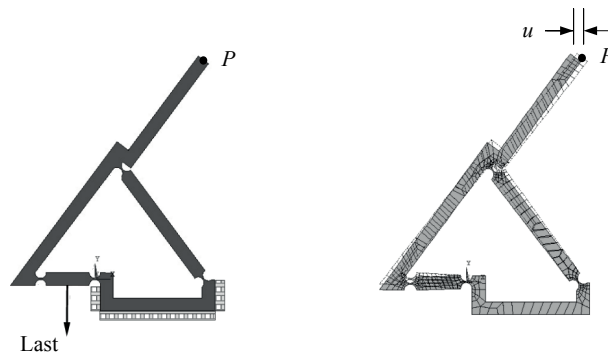


Abbildung 2.5: Stabiles monotonen Verhalten einer nachgiebigen Struktur mit fixierter konzentrierter Nachgiebigkeit (links - schematischer Mechanismus, rechts - FEM-Modell des Mechanismus) [D. Pavlovic 2005]

Das *stabile Verhalten mit Richtungsumkehr* äußert sich durch eine Zweideutigkeit im Last-Verformungs-Diagramm der betrachteten Strukturen. Das bedeutet, ein und derselbe Wert der Verschiebung kann sich für zwei unterschiedlich große Lasten einstellen. Außerdem existiert ein Umkehrpunkt, an dem bei weiterer Laststeigerung die Verformungsrichtung umgekehrt wird.

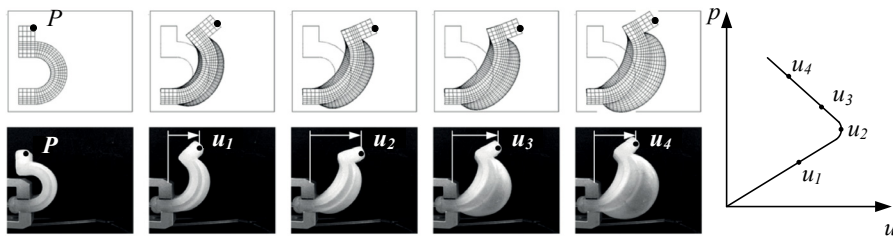


Abbildung 2.6: Gekrümmte Stabstruktur aus Silikonelastomer mit fixierter konzentrierter Nachgiebigkeit, die das Verhalten einer Richtungsumkehr bei steigendem Innendruck p realisiert [Zentner 2006; Böhm 2006]

In Abbildung 2.6 ist eine gekrümmte Stabstruktur in simulierter, obere Bildfolge, und in realer Darstellung, untere Bildfolge, abgebildet, die ein stabiles Verhalten mit Richtungsumkehr unter Innendruckbelastung aufweist [Böhm 2006]. Um ein Last-Verformungs-Verhalten, wie es für eine Richtungsumkehr charakteristisch ist, zu beobachten, wird der Punkt P der Strukturen in Abbildung 2.6 oben betrachtet. Die Verschiebung u_2 stellt in

diesem Beispiel die Verschiebung des Punktes P in der Raumrichtung dar, bei der die Richtungsumkehr erfolgt.

Das instabile Verhalten nachgiebiger Strukturen kann in Verhalten mit *Bifurkation* und in Verhalten mit mechanischem *Durchschlageffekt* unterschieden werden. In Abbildung 2.7 ist eine Struktur dargestellt, welche in ihrem Inneren über drei axial verlaufende dehnfeste Fäden verfügt. Diese Fäden sind so angeordnet, dass sie den gleichen Abstand zur Rotationsachse der zylinderförmigen Struktur und einen konstanten Abstand zueinander haben. Die Struktur ist an ihrem linken Ende fixiert. Werden alle drei Fäden mit einer Zugkraft belastet, entsteht ein Belastungsfall, der analog bei einem Stab unter Druckbelastung auftritt. Mit dieser grundlegenden Belastungsart wird ab einer kritischen Last ein Knicken der Struktur hervorgerufen.

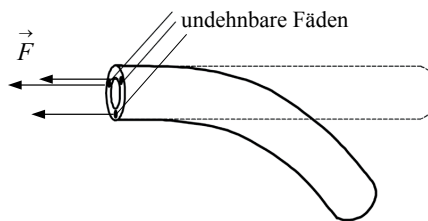


Abbildung 2.7: Schematische Darstellung einer nachgiebigen Struktur mit Bifurkationsverhalten [Zentner 2006]

Die zweite grundlegende Form der Instabilität ist der mechanische Durchschlageffekt. In Abbildung 2.8 und Abbildung 2.9 sind Strukturen abgebildet, die ein Verformungsverhalten aufweisen, welches als mechanischer Durchschlageffekt definiert wird.

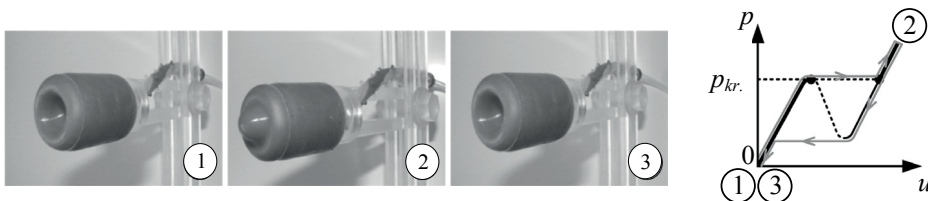


Abbildung 2.8: Struktur aus Silikonelastomer mit fixierter verteilter Nachgiebigkeit und monostabiler Durchschlagcharakteristik (1-3) und die dazugehörige Druck-Verschiebungs-Kurve des Mittelpunktes der gewölbten Stirnfläche [Böhm 2006]

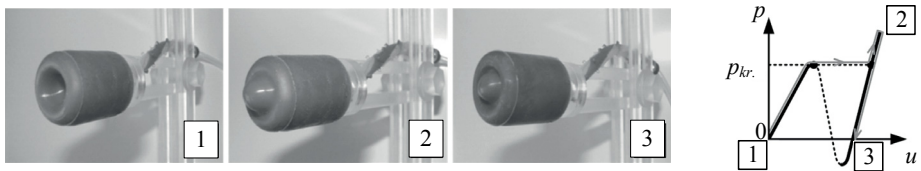


Abbildung 2.9: Struktur aus Silikonelastomer mit fixierter verteilter Nachgiebigkeit und bistabiler Durchschlagcharakteristik (1-3) und die dazugehörige Druck-Verschiebungs-Kurve des Mittelpunktes der gewölbten Stirnfläche [Böhm 2006]

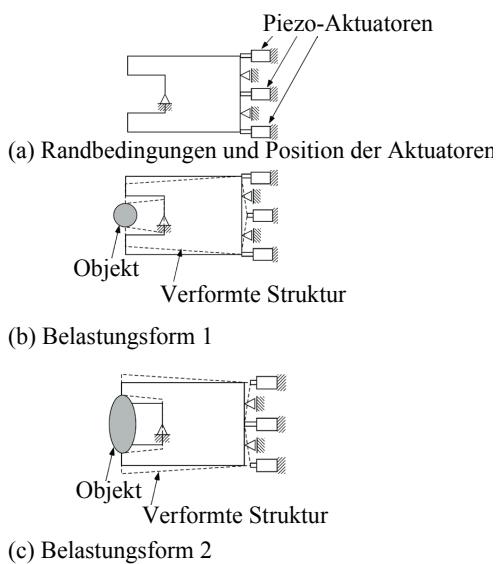


Abbildung 2.10: Schematische Darstellung eines nachgiebigen Mechanismus mit Durchschlageffekt [Ohsaki 2005]

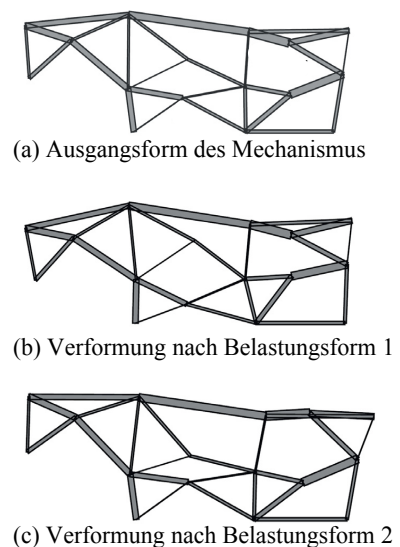


Abbildung 2.11: Optimierte Struktur nach dem Schema aus Abbildung 2.10 [Ohsaki 2005]

Dieses Verhalten wird durch gezielte Dimensionierung der Geometrie sowie durch ein definiertes Anlegen eines pneumatischen Druckes im Inneren der Strukturen erreicht.

Weiterhin existieren Ansätze und Entwicklungen von komplexen nachgiebigen Strukturen, welche u. a. aus Stabelementen bestehen und unter Nutzung verschiedener Antriebsarten einen mechanischen Durchschlageffekt erzielen. In Abbildung 2.10 ist eine schematische Veranschaulichung zur Funktionsweise einer nachgiebigen Struktur mit mechanischem Durchschlageffekt und Piezoantrieb dargestellt.

Diese komplexe Struktur verfügt über zwei stabile Lagen, in denen ein Objekt gegriffen wird, Abbildung 2.11 b und c. Auf Grundlage des Schemas wurde eine Topologieoptimierung durchgeführt, siehe Abbildung 2.11, um eine optimale Funktionsweise zu realisieren [Oshaki 2005].

2.2 Mechanischer Durchschlageffekt

Im Abschnitt 2.1.2 wurden die grundlegenden statisch-mechanischen Verhaltensarten beschrieben. Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt in der Untersuchung des Durchschlagverhaltens von nachgiebigen Strukturen. Daher wird in diesem Abschnitt der Durchschlageffekt in seinen Grundzügen erläutert.

In Abbildung 2.12 ist ein Beispiel für ein elastisches System mit Durchschlagcharakteristik dargestellt. Anhand dieses Beispiels soll durch eine kurze mathematische Beschreibung das Verhalten eines mechanisch durchschlagenden Systems erläutert werden.

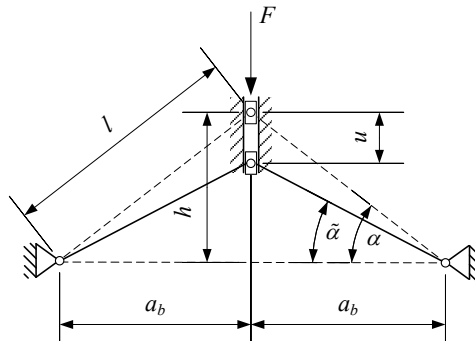


Abbildung 2.12: Beispiel für ein Durchschlagproblem elastischer Systeme (Volllinie = verformtes System)

Das betrachtete System wird durch zwei elastische Stäbe dargestellt, die in der Ebene gelenkig gelagert und durch ein Gelenk verbunden sind. Die Gelenke sollen ideal reibungsfrei sein, um ein Auftreten von Biegemomenten ausschließen zu können. Am gemeinsamen Gelenk der Stäbe liegt eine vertikal angreifende Kraft an. Durch diese Kraft herrscht an den Stäben eine Druck- und Biegebelastung [Pflüger 1975]. Das äquatoriale Flächenträgheitsmoment der Querschnitte wird hinreichend groß angenommen, um das Knicken der Stäbe und die Durchbiegung zu vermeiden. Es werden folglich ausschließ-

lich Druckbelastungen zugelassen und betrachtet. Des Weiteren ist die Verschiebung des gemeinsamen Gelenkes nur in vertikaler Richtung möglich. Mit diesen Annahmen wird das System analysiert. Die Kraft F kann in Normalkräfte zerlegt werden, woraus sich die resultierenden Stabkräfte F_s für das verformte System unter der Berücksichtigung der Dehnung ε ergeben:

$$F_s = \frac{F}{2 \sin \tilde{\alpha}} = \frac{F}{2} \frac{l(1+\varepsilon)}{h-u}. \quad (2.1)$$

Dabei ist h die Höhe des Tragwerkes in der Ausgangslage, u die Verschiebung im gemeinsamen Gelenk der Stäbe, ε die Dehnung in den Stäben, l die Länge der Stäbe und $\tilde{\alpha}$ der Winkel eines Stabes zur x -Achse im belasteten Zustand. Die geometrische Betrachtung des Systems liefert folgenden Zusammenhang:

$$\begin{aligned} (l(1+\varepsilon))^2 &= a_b^2 + (h-u)^2 \\ &= l^2 - 2hu + u^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Für die Dehnung ergibt sich hieraus Folgendes:

$$\varepsilon = \frac{1}{l} \sqrt{l^2 - 2hu + u^2} - 1. \quad (2.3)$$

Unter Nutzung des zugrunde liegenden HOOKESCHEN Gesetzes gilt:

$$\sigma = \frac{F_s}{A} = E\varepsilon. \quad (2.4)$$

Durch Umstellen nach F_s und Einsetzen in (2.1) ergibt sich:

$$F = 2EA \frac{(h-u)}{l} \left(\frac{l}{\sqrt{l^2 - 2hu + u^2}} - 1 \right) \quad (2.5)$$

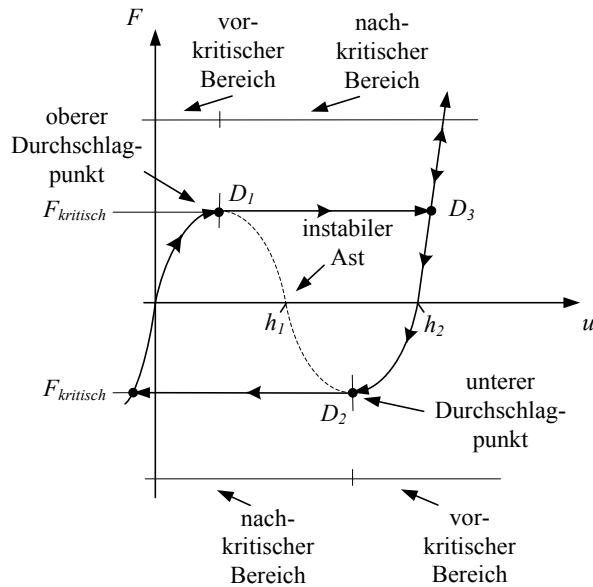


Abbildung 2.13: Kraft-Verschiebungs-Verlauf einer durchschlagenden Struktur mit Kennzeichnung der charakteristischen Punkte

Die Abhängigkeit der anliegenden Kraft F von der Verschiebung u ist in Abbildung 2.13 schematisch dargestellt und zeigt einen Kurvenverlauf mit einem lokalen Maximum und einem lokalen Minimum; die Abszissenachse wird bei $u = 0$, $u = h_1$ und $u = h_2$ geschnitten.

Das System befindet sich bei $F = 0$, $u = 0$ und bis zum Erreichen von D_1 in einem stabilen, zwischen D_1 und D_2 sowie bei $u = h_1$ in einem instabilen und bei $F = 0$ und $u = h_2$ bis D_3 wieder in einem stabilen Zustand. Wird das System belastet, so bewegt sich der Arbeitspunkt des Systems entsprechend dem dargestellten Verlauf von 0 bis D_1 . Hierbei stellt D_1 einen kritischen Punkt dar, auch oberer Durchschlagpunkt genannt, in dem eine weitere infinitesimal kleine positive Krafterhöhung dazu führt, dass die Struktur in den Bereich für instabiles Verhalten übergeht. Dieser Bereich ist dadurch gekennzeichnet, dass Kräfte kleiner als $F_{kritisch}$ (Kraft bei D_1) zu einer Zunahme der Verschiebung u führen. Mit Überschreiten des oberen Durchschlagpunktes D_1 erfolgt der Durchschlagvorgang, und die Struktur gelangt im Punkt D_3 zu einer neuen Gleichgewichtslage. Mit einer

weiteren Erhöhung der Kraft verläuft die Verschiebung stetig und steigend, das System befindet sich auf einem „stabilen“ Kurvenabschnitt. Wird das System wieder entlastet, verhält sich der Kurvenverlauf auf ähnliche Weise. Die Kurve verläuft über D_3 bis D_2 und das System zeigt stabilen Charakter. Wird in D_2 (dem sogenannten unteren Durchschlagpunkt) eine weitere infinitesimal kleine Kraft in negativer Richtung aufgebracht, geht das System in ein instabiles Verhalten über und schlägt abermals durch.

Ist ein Schnittpunkt mit der u -Achse (außer im Nulldurchgang) lokalisierbar, bedeutet das, dass eine negative Kraft nötig ist, um das System in seine Ausgangslage zurückzubringen. Somit liegt ein *bistabiles Systemverhalten* vor. Weist der Kraft-Verschiebungsverlauf hingegen keine Nullstelle für $u > 0$ auf, so wird von *monostabilem Systemverhalten* gesprochen.

Der durch statische Rechnung im überkritischen Bereich ermittelte Teil der Kraft-Verformungs-Kurve ist rein theoretischer Natur, er liefert jedoch Aufschlüsse über die Empfindlichkeit gegenüber Imperfektionen des Systems [Wessels 1977].

2.3 Grundlagen des statisch-mechanischen Verhaltens einer Rotationsschale unter Druckbelastung

Die elementaren Grundlagen der Statik einer Rotationsschale sind auf das allgemeine Themengebiet der Schalentheorie zurückzuführen. Eine Schale ist eine Sonderform eines allgemeinen Flächentragwerkes. Ein Flächentragwerk wird dadurch charakterisiert, dass es über eine flächenhafte Geometrie verfügt, wobei die Dicke, also die Abmessung senkrecht zur Fläche, gegenüber der Ausdehnung der Fläche gering ist. Diese Eigenschaft erlaubt folgende Annahmen:

- der Halbierungspunkt der Dicke bzw. der Wandstärke definiert die Mittelfläche des Flächenträgers,
- Punkte, die auf einer Normalen zur Mittelebene liegen, befinden sich auch nach einer Verformung wieder auf einer solchen Geraden,
- senkrecht zur Mittelebene wirkende Normal- und Schubspannungen sind vernachlässigbar klein,
- und die Verformungen sind klein im Vergleich zur Wandstärke [Pflüger 1981].

Durch diese Annahmen kann die Berechnung des Spannungs- und Verformungszustandes wesentlich einfacher gestaltet werden als im allgemeinen Fall bei der Untersuchung von Körpern, die als ein dreidimensionales elastisches Kontinuum behandelt werden müssen. Die Besonderheit einer Schale ist zudem, dass die Fläche über eine beliebig gekrümmte Gestalt verfügt.

Die möglichen Schalenarten werden in der vorliegenden Arbeit durch die Forderung nach Rotationssymmetrie auf solche beschränkt, die eine Achse haben und deren Mittelfläche sich durch Drehung einer beliebigen Kurve, des Meridians, um diese Achse darstellen lässt. Weiterhin besitzt der Meridian einen Schnittpunkt mit der Rotationsachse [Hampe, 1968]. Der Schnittpunkt mit der sogenannten Rotationsachse führt dazu, dass einseitig geschlossene rotationssymmetrische Schalen betrachtet werden, siehe Abbildung 2.14.

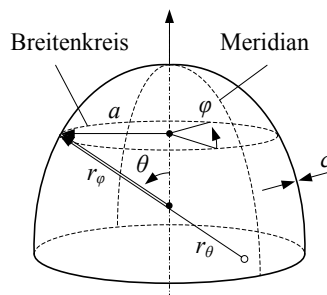


Abbildung 2.14: Darstellung einer Rotationsschale und deren relevante Grundgrößen [vgl. Hampe 1968]

In Abbildung 2.14 stellen a den Radius des Horizontalkreises in der Ebene bzw. des Breitenkreises, r_θ den Öffnungsradius des Meridians, r_φ den Hauptkrümmungsradius des Breitenkreises, θ den Winkel der Meridianebene, φ den Winkel des Breitenkreises und c die Wandstärke der Schale dar.

Im Weiteren wird eine kurze Einführung in die Biegetheorie von rotationssymmetrisch belasteten Rotationsschalen gegeben. Hierbei wird ergänzend für weitere und ausführlichere Darstellungen auf die Bücher von Flügge 1957; Hampe 1968; Pflüger 1981; Krätzig 1985 und Flügge 1990 hingewiesen.

In Abbildung 2.15 und Abbildung 2.16 ist ein belastetes Schalelement einer Rotationschale mit den auftretenden Schnittkräften und -momenten dargestellt, wobei die Belastung durch einen gleichmäßig verteilten Druck in z -Richtung p_z erfolgt. Mithilfe dieser Darstellungen werden die Gleichgewichtsbedingungen angegeben.

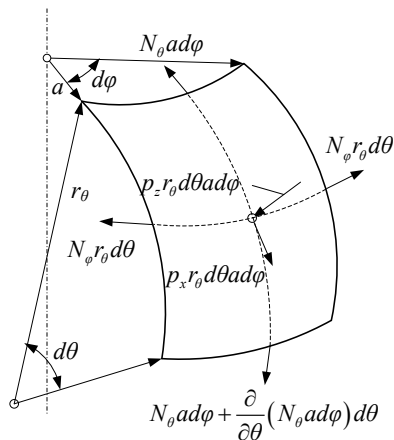


Abbildung 2.15: Darstellung der auftretenden Normalkräfte am Schnittufer einer Schalenmittelfläche bei rotationssymmetrischer Belastung

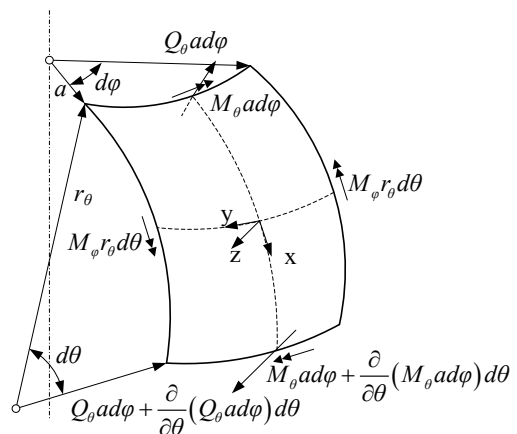


Abbildung 2.16: Darstellung der auftretenden Querkräfte und Schnittmomente am Schnittufer einer Schalenmittelfläche bei rotationssymmetrischer Belastung

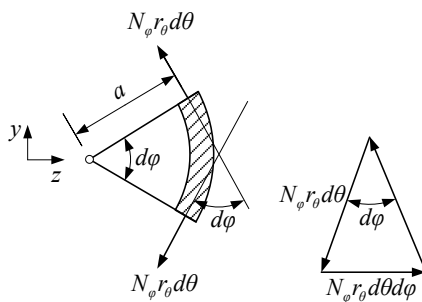


Abbildung 2.17: Breitenkreisschnitt durch ein Schalelement mit den Normalkräften N_ϕ

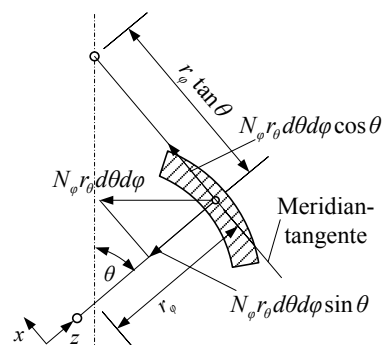


Abbildung 2.18: Meridianschnitt durch ein Schalelement mit den Normalkräften N_ϕ

Für die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen werden alle Streckenmomente mit M , Streckennormalkräfte mit N und Streckenquerkräfte mit Q bezeichnet. Diese Schnittkräfte und -momente werden je nach Richtungsänderung mit den Winkeln θ und φ indiziert. Weiterhin werden bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen die infinitesimalen Größen zweiter Potenz vernachlässigt.

Das Gleichgewicht der Kräfte in Richtung der Meridiantangente, d. h. in x -Richtung, lautet:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (N_\theta a d\varphi) d\theta - N_\varphi r_\theta d\theta d\varphi \cos \theta - Q_\theta a d\varphi d\theta + p_x r_\theta d\theta a d\varphi = 0. \quad (2.6)$$

Das Gleichgewicht in y -Richtung ist aufgrund der definierten Drehsymmetrie erfüllt. Für das Gleichgewicht in z -Richtung ergibt sich hingegen:

$$N_\theta a d\varphi d\theta + N_\varphi r_\theta d\theta d\varphi \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} (Q_\theta a d\varphi) d\theta + p_z r_\theta d\theta a d\varphi = 0. \quad (2.7)$$

Weiterhin ist das Momentengleichgewicht um die x - und z -Achse aus Symmetriegründen selbst erfüllt. Für das Momentengleichgewicht um die y -Achse ergibt sich unter Berücksichtigung von Abbildung 2.19 und der daraus erhaltenen Gleichung (2.8) die Gleichung (2.9).

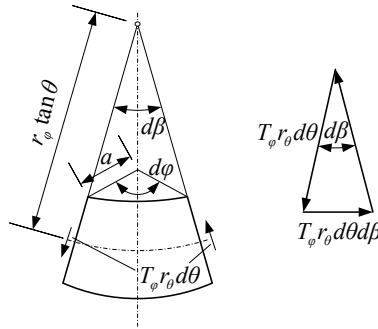


Abbildung 2.19: Projektion einer Mittelfläche mit den Schubkräften T_φ in Richtung der Schalenormalen

$$a d\varphi = r_\varphi \tan \theta d\beta \quad \rightarrow \quad d\beta = \frac{a d\varphi}{r_\varphi \tan \theta} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (M_{\theta} a d\varphi) d\theta - Q_{\theta} a d\varphi r_{\theta} d\theta + M_{\varphi} r_{\theta} d\theta \frac{a d\varphi}{r_{\varphi} \tan \theta} = 0 . \quad (2.9)$$

Nach Division der Gleichungen (2.6), (2.7) und (2.9) durch $d\theta d\varphi$ und mit $a = r_{\varphi} \sin \theta$ ergibt sich folgendes Gleichungssystem, wobei der Übergang zu den gewöhnlichen Differentialgleichungen vorgenommen wird, da nach vorgenommenen Vereinfachungen jede Variable nur von einem Parameter abhängt.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} (N_{\theta} r_{\varphi} \sin \theta) - N_{\varphi} r_{\theta} \cos \theta - Q_{\theta} r_{\varphi} \sin \theta + p_x r_{\theta} r_{\varphi} \sin \theta &= 0 \\ N_{\theta} r_{\varphi} \sin \theta + N_{\varphi} r_{\theta} \sin \theta + \frac{d}{d\theta} (Q_{\theta} r_{\varphi} \sin \theta) + p_z r_{\theta} r_{\varphi} \sin \theta &= 0 \\ \frac{d}{d\theta} (M_{\theta} r_{\varphi} \sin \theta) - Q_{\theta} r_{\theta} r_{\varphi} \sin \theta + M_{\varphi} r_{\theta} \cos \theta &= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Mit Gleichungssystem (2.10) wird gezeigt, dass der Kräftezustand am Schalelement statisch unbestimmt ist (3 Gleichungen aber 5 Unbekannte – N_{φ} , N_{θ} , M_{φ} , M_{θ} , Q_{θ}). Aus diesem Grund wird zur vollständigen Berechnung der Verformungszustand der Schale mit betrachtet.

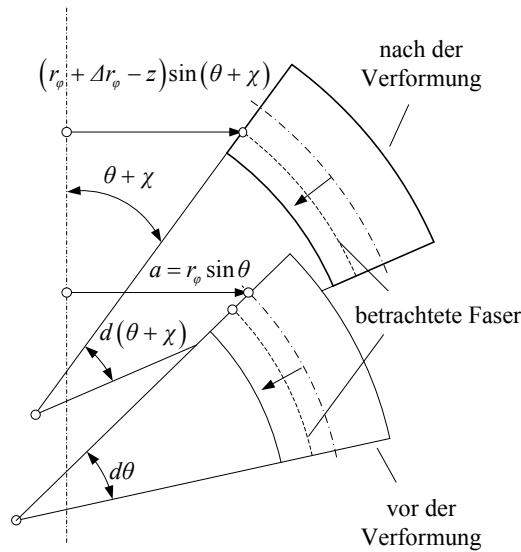


Abbildung 2.20: Meridianschnitt eines Schalelementes vor und nach der Verformung

Im Zuge der Berechnungen des Verformungszustandes werden die Schnittgrößen durch geeignete Formänderungsgrößen ausgedrückt. Hierzu werden die Dehnung ε der Mittelfläche und die Drehung der Meridianfläche χ betrachtet, wobei diese Größen nicht voneinander unabhängig, sondern durch geometrische Beziehungen miteinander verknüpft sind. Hierbei ist r_φ der Radius des Breitenkreises bei Drehung mit φ , r_θ der Radius des Meridians bei Drehung mit θ und c stellt die Dicke des Schalenelementes dar. Für die Dehnung einer in einem bestimmten Abstand z von der Mittelfläche und parallel zum Meridian verlaufender Faser ergibt sich:

$$\varepsilon_\theta(z) = \frac{(r_\theta + \Delta r_\theta - z)d(\theta + \chi) - (r_\theta - z)d\theta}{(r_\theta - z)d\theta} . \quad (2.11)$$

Nach Ausmultiplizieren von (2.11) wird $\Delta r_\theta d\chi$ gleich Null gesetzt, weil nur Glieder berücksichtigt werden, die in den Formänderungen linear sind. Mit der Annahme von $z = 0$ wird ε_θ von z unabhängig. Durch das Gleichsetzen von $\varepsilon_\theta(z)$ und ε_θ wird Δr_θ eliminiert und es folgt:

$$\varepsilon_\theta(z) = \frac{r_\theta}{r_\theta - z} \varepsilon_\theta - \frac{z}{r_\theta - z} \frac{d\chi}{d\theta} . \quad (2.12)$$

Weiterhin folgt für die Dehnung einer im Abstand z vom Breitenkreis verlaufenden Ringfaser:

$$\varepsilon_\varphi(z) = \frac{(r_\varphi + \Delta r_\varphi - z)\sin(\theta + \chi)d\varphi - (r_\varphi - z)\sin\theta d\varphi}{(r_\varphi - z)\sin\theta d\varphi} . \quad (2.13)$$

Gleichung (2.13) kann ebenfalls unter der Berücksichtigung von kleinen Verformungen mit $\cos\chi = 1$ und $\sin\chi = \chi$ vereinfacht werden und $\Delta r_\varphi d\chi$ wird gleich Null gesetzt. Auch hier gilt mit $z = 0$ und durch Gleichsetzen von $\varepsilon_\varphi(z)$ und ε_φ wird Δr_φ eliminiert und es folgt:

$$\varepsilon_\varphi(z) = \frac{r_\varphi}{r_\varphi - z} \varepsilon_\varphi - \frac{z}{r_\varphi - z} \chi \cot\theta . \quad (2.14)$$

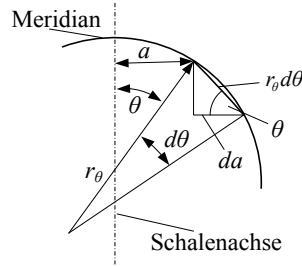


Abbildung 2.21: Meridianschnitt einer Rotationsschale

Zur Bestimmung der Drehung der Meridianfläche wird mithilfe der Darstellung in Abbildung 2.21 die Gleichung (2.15) aufgestellt:

$$\cos \theta = \frac{da}{r_\theta d\theta}. \quad (2.15)$$

Weiterhin gehen die Größen aus (2.15) bei Formänderung von θ in $\theta + \chi$, a in $(1 + \varepsilon_\varphi) a$ und $r_\theta d\theta$ in $(1 + \varepsilon_\theta) r_\theta d\theta$ über, woraus mit Beschränkung auf kleine Verformungen, $a = r_\varphi \sin \theta$ und geeigneter Umformung folgt:

$$\chi = (\varepsilon_\theta - \varepsilon_\varphi) \cot \theta - \frac{r_\varphi}{r_\theta} \frac{d\varepsilon_\varphi}{d\theta}. \quad (2.16)$$

Mithilfe des HOOKESchen Gesetzes kann ferner der Zusammenhang zwischen Dehnungen und den dazu gehörigen Spannungen hergestellt werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_\theta(z) + \mu \varepsilon_\varphi(z)), \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_\varphi(z) + \mu \varepsilon_\theta(z)). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Unter der Berücksichtigung von (2.12) und (2.14) mit $z \ll r_\varphi$ und $z \ll r_\theta$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\varepsilon_\theta + \mu \varepsilon_\varphi - \frac{z}{r_\theta} \frac{d\chi}{d\theta} - \mu \frac{z}{r_\varphi} \chi \cot \theta \right), \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\varepsilon_\varphi + \mu \varepsilon_\theta - \frac{z}{r_\varphi} \chi \cot \theta - \mu \frac{z}{r_\theta} \frac{d\chi}{d\theta} \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Im Weiteren werden die Schnittgrößen aus den Spannungen, durch Integration über den Abstand zur Mittelfläche z und über die Krümmungswinkel φ und θ ermittelt. Hierzu wird die Abbildung 2.22, mit der Darstellung der Spannungen, zur Bestimmung der Schnittgrößen herangezogen.

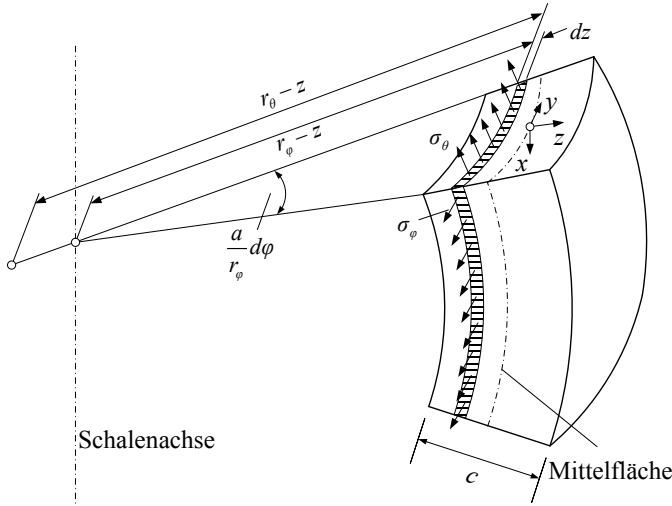


Abbildung 2.22: Spannungen am Schalelement

Für das Gleichgewicht in Meridianrichtung ergibt sich somit:

$$N_\theta a d\varphi = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \sigma_\theta (r_\varphi - z) \frac{a}{r_\varphi} d\varphi dz. \quad (2.19)$$

Die Gleichung (2.19) wird mit $a d\varphi$ dividiert ($a d\varphi \neq 0$), mit $z \ll r_\varphi$ und $z \ll r_\theta$ und anschließender Integration folgt:

$$N_\theta = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \sigma_\theta dz = \frac{Et}{1-\mu^2} (\varepsilon_\theta - \mu \varepsilon_\varphi). \quad (2.20)$$

Die Größen N_φ , M_φ und M_θ werden analog zu N_θ berechnet. Die Gleichungen (2.10), (2.16), (2.20) und die Größen N_φ , M_φ , M_θ ergeben für Rotationsschalen unter rotations-symmetrischer Belastung, mit $r_\varphi = r_\theta = r$; $p_x = 0$ und Division durch r ($r \neq 0$) im Gleichungssystem (2.10) folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{d\theta}(N_\theta \sin \theta) - N_\varphi \cos \theta - Q_\theta \sin \theta, \\
0 &= N_\theta \sin \theta + N_\varphi \sin \theta + \frac{d}{d\theta}(Q_\theta \sin \theta) + p_z r \sin \theta, \\
0 &= \frac{d}{d\theta}(M_\theta \sin \theta) - Q_\theta r \sin \theta + M_\varphi \cos \theta, \\
N_\theta &= \frac{Ec}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta - \mu \varepsilon_\varphi), \\
N_\varphi &= \frac{Ec}{1-\mu^2}(\varepsilon_\varphi - \mu \varepsilon_\theta), \\
M_\theta &= \frac{Ec^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{r} \frac{d\chi}{d\theta} - \mu \frac{\chi}{r} \cot \theta \right), \\
M_\varphi &= \frac{Ec^3}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{\chi}{r} \cot \theta - \mu \frac{1}{r} \frac{d\chi}{d\theta} \right), \\
\chi &= (\varepsilon_\theta - \varepsilon_\varphi) \cot \theta - \frac{d\varepsilon_\varphi}{d\theta}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Durch Umformen des Gleichungssystems (2.21) nach der Drehung der Meridianfläche χ und der Querkraft Q_θ ergibt sich folgendes nichtlineares Gleichungssystem, wobei die Ableitungen nach θ durch angestrichene Größen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
r^2 \frac{Q_\theta}{B} &= \chi'' + \chi' \cot \theta - \chi (\mu - \cot^2 \theta) \quad \text{mit} \quad B = \frac{Ec^3}{12(1-\mu^2)}, \\
-Eh\chi &= Q_\theta'' + Q_\theta' \cot \theta + Q_\theta (\mu - \cot^2 \theta).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Wobei B als Biegesteifigkeit definiert wird. Mithilfe des Gleichungssystems (2.22) können alle Kräfte und Verformungen ermittelt werden. Die analytische Lösung ist jedoch sehr aufwendig und wird an dieser Stelle nicht weiter erläutert. Für die Lösung und die weitere Vertiefung wird hier nochmals auf die zu Beginn erwähnte Literatur hingewiesen. Das Gleichungssystem (2.22) wird in dieser Arbeit mithilfe von numerischen Methoden bearbeitet. Im Kapitel 3.3 wird nochmals auf die Ergebnisse eingegangen.

2.4 Stand der Forschung und Technik zum mechanischen Durchschlageffekt an rotationssymmetrischen Strukturen

2.4.1 Stand der Forschung

Die Forschungsarbeiten zum Thema des mechanischen Durchschlageffektes an rotationssymmetrischen gekrümmten einseitig geschlossenen Strukturen unter Druckbelastung erfolgen bereits seit dem frühen Zwanzigsten Jahrhundert. Die ausführliche analytische Ermittlung der kritischen Lasten für Kugelschalen unter Außendruckbelastung begann mit der Arbeit von ZOELLY [Zoelly 1915]. In dieser Arbeit hat ZOELLY die Verzweigungslast des Gleichgewichtes mit der Annahme ermittelt, dass bis zum Augenblick des Stabilitätsverlustes in allen Normalschnitten nur Membrandruckspannungen wirken. Diese Ergebnisse konnten durch experimentelle Versuche jedoch nur in einem breiten Streubereich von 15 - 40 % der Zoellylast p_{zoe} , Gleichung (2.23), bestätigt werden [Wessels 1977].

$$p_{zoe} = \frac{2}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} E \frac{c^2}{r} \quad (2.23)$$

VON KÁRMÁN [von Kármán 1939] wendete erstmals im Jahre 1939 die nichtlineare Schalentheorie zur Berechnung von Stabilitätsproblemen an. Ihre Berechnungen beruhten auf der Annahme, dass sich eine lokale Anfangsbeule im Scheitel der Kugelschale einstellt. Die Beullast dieses flachen Teilausschnittes der gesamten Kugelschale kann gleichgesetzt werden mit der kritischen Last des gesamten Tragwerks. Die Untersuchungen über die Stabilität starr eingespannter flacher Kugelschalen sind nach Arbeiten von BUDIANSKY, THURSTON, WEINITSCHKE, HUANG und anderen zu einem Abschluss gelangt [Budiansky 1959; Thurston 1961; Huang 1964; Weinitschke 1965].

Die Ergebnisse von BUDIANSKY und den anderen genannten Autoren ergeben die qualitativen Verläufe der kritischen Last $p_k / p_{zoe} (\lambda_{SP})$ für rotationssymmetrisches und asymmetrisches Durchschlagen wie in Abbildung 2.23 dargestellt ist. Der Schalenparameter λ_{SP} setzt sich wie folgt zusammen:

$$\lambda_{SP}^2 = \sqrt{12(1-\mu^2)} \frac{2h}{c}. \quad (2.24)$$

Die genannten Arbeiten wurden überwiegend für den Fall der flachen Kugelschale durchgeführt. Zudem wurde für diese Untersuchungen ein Material verwendet, welches linear elastisch ist und dem HOOKSCHEN Gesetz folgt sowie über eine Querkontraktionszahl von 0,3 verfügt (z. B. Stahl).

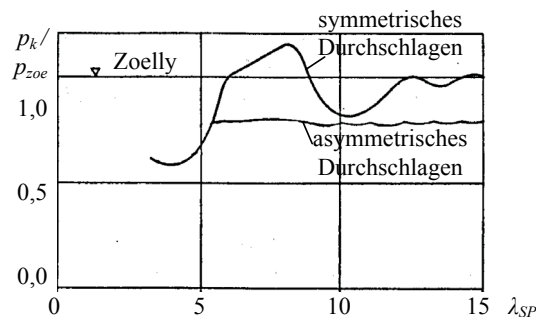


Abbildung 2.23: Verlauf der kritischen Last p_k / p_{zoe} in Abhängigkeit vom geometrischen Schalenparameter λ_{SP} bei rotationssymmetrischem und asymmetrischem Durchschlagen von sphärischen Strukturen bzw. Kugelschalen [Budiansky 1959; Thurston 1961; Weinitschke 1965 u. a.]

Des Weiteren untersuchte KINKEL flache Kugelschalen mithilfe des Energieverfahrens der nichtlinearen Schalentheorie. Hingegen nutzte WESSELS die Finite-Elemente-Methode und das Bogenlängenverfahren zur Lösung des Stabilitätsproblems von belasteten Kugelschalen [Kinkel 1970; Wessels 1977]. Beide bestätigten die Ergebnisse zu den auftretenden Durchschlaglasten von BUDIANSKY und WEINITSCHKE.

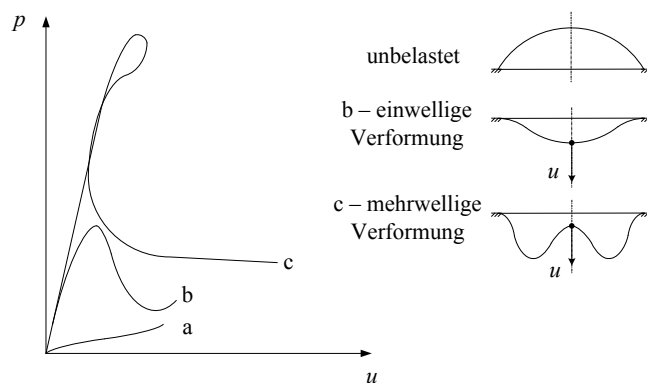


Abbildung 2.24: Schematische Last-Verformungs-Kurven und die dabei auftretenden Durchschlagbiegeflächen von sphärischen Strukturen. Kurve a zeigt stabiles Verhalten und Kurven b und c zeigen Durchschlagverhalten [vgl. Wessels 1977].

In den genannten Arbeiten wurde festgestellt, dass flache Kugelschalen unter Außendruck bei einem bestimmten geometrischen Verhältnis von Höhe zu Wandstärke und unter Nutzung eines HOOKSCHEN Materialverhaltens keinen Durchschlageffekt aufweisen, siehe Abbildung 2.24, Kurve a. Zudem wurden geometrische Verhältnisse ermittelt, bei denen symmetrisches Durchschlagen stattfindet, Kurve b. Weiterhin konnte gezeigt werden, dass Strukturen existieren, bei denen eine mehrwellige Verformung im Durchschlagpunkt auftritt. Das bedeutet, dass im Last-Verformungs-Diagramm auf der Abszisse und Ordinate Mehrdeutigkeiten auftreten, Kurve b und c.

Die auftretenden Mehrdeutigkeiten sind dadurch bedingt, dass sich die Welligkeit der Verformung im überkritischen Bereich kontinuierlich ändert. Diese Änderung kann dazu führen, dass im nachkritischen Bereich mehrere stabile Gleichgewichte auftreten können. Das bedeutet, dass sich die Strukturen - bei statischer Betrachtung - über einen mehrstufigen Durchschlag verformen. Zudem wurden die Aussagen über die Welligkeit unter der Voraussetzung getroffen, dass die Verformung rotationssymmetrisch erfolgt.

Die Vorarbeiten gaben Anlass, unterschiedlichste Schalenstrukturen zu analysieren und zu beschreiben. Es werden zusammengesetzte (Komposite) oder orthotrop versteifte Schalen näher betrachtet [Muc 1989; Öry 2001; Blachut 2010]. Andere Forschergruppen wiederum befassen sich mit rotationssymmetrischen Zylindern und berechnen die auftretenden Beul- und Durchschlaglasten unter Druckbelastung in axialer Richtung [Esslinger 1972; Agryris 1978; Zarutskii 1997; Degenhardt 2007, u.a.]. Des Weiteren werden auch Kegel [Shkutin 2001, u.a.], Ellipsoide [Smith 2008, u.a.] und nichtlinear elastische Vollkugelschalen [Labisch 2006] unter externer Druckbelastung untersucht.

Die gleichmäßige Druckbelastung der Strukturen stellt nicht die einzige Belastung dar, die zu einem Durchschlageffekt führen kann. Es werden auch Untersuchungen angestellt, die die Ermittlung des Verhaltens sphärischer Strukturen unter thermischer oder axialer punktueller Belastung zum Ziel haben [Shahsiah 2003; Gupta 2008].

Fast alle genannten Arbeiten haben die Gemeinsamkeit, dass sie isotrope linear elastische Strukturen für ihre Untersuchungen zugrunde legten. Die Arbeiten von LABISCH, BÖHM und EVKIN [Evkin 1997, Labisch 2006, Böhm 2006] wurden jedoch unter der Voraussetzung von inkompressiblen nichtlinear elastischen Schalen durchgeführt.

Es zeigt sich, dass die Untersuchungen im Bereich des mechanischen Durchschlages an Strukturen mit nichtlinear elastischen Materialeigenschaften noch nicht abgeschlossen sind und somit Anlass zu weiteren grundlegenden Erforschungen des Sachverhaltes gegeben ist. So wurden beispielsweise bisher keine abschließenden Aussagen über den Einfluss des Materials auf das Durchschlagverhalten getroffen, beziehungsweise wurde kein direkter Vergleich zwischen Strukturen, die aus ideal linear elastischem und nichtlinear elastischem Material hergestellt sind, vorgenommen. Des Weiteren wurden keine Einteilungen der Last-Verschiebungs-Kurven nach Verlaufsmuster und eine damit verbundene Einteilung der Durchschlagcharakteristik in Abhängigkeit von den geometrischen Eigenschaften vorgenommen.

Die Untersuchungen des Durchschlagverhaltens der genannten Strukturen stellt die Forschungsgemeinschaft auch weiterhin vor schwer zu lösende Aufgaben im Bereich der Berechnungsverfahren. Auf der Seite der analytischen Methoden wurden die Membrantheorie [Zoelly 1915], die nichtlineare Schalentheorie [Budiansky 1959; Weinitschke 1965; u.a.] und die Energiemethode [Kinkel 1970] eingesetzt, um die kritischen Lasten und das nachkritische Verhalten zu analysieren. Demgegenüber wurden auf der Seite der numerischen Methoden die Galerkin-Methode [Budiansky 1962], die Finite-Differenzen-Methode und die Finite-Elemente-Methode [Wessels 1977] eingesetzt.

Heutzutage werden überwiegend numerische Verfahren genutzt, um die Instabilitätseigenschaften von Strukturen zu ermitteln. Aus diesem Grund wurden unterschiedliche Berechnungsverfahren erarbeitet. Eines dieser Verfahren ist das *Bogenlängenverfahren*. Das Bogenlängenverfahren ist sehr effektiv und wurde schon früh von verschiedenen Autoren entwickelt [Riks 1972; Wessels 1977; Crisfield 1981; Fried 1984] und später ergänzt [Schneider 1997; Szyszkowski 1999; Bashir-Ahmed 2004; u.a.].

Die Entwicklung des Bogenlängenverfahrens für die FEM ist auf RIKS [Riks 1972] zurückzuführen. Er stellte eine Möglichkeit bereit, die Probleme zu lösen, die mit dem bis dahin überwiegend genutzten NEWTON-RAPHSON-Verfahren nur bedingt lösbar waren. Die bedingten Lösbarkeiten ergeben sich bei der Nutzung des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens für nichtlineare Probleme mit Erreichen eines Maximums oder Minimums im Last-Verformungs-Verlauf. Im Abschnitt 2.5 wird auf die Unterschiede der Berechnungsalgorithmen näher eingegangen.

Das Forschungsgebiet zur Ermittlung des Durchschlagverhaltens von sphärischen Strukturen beschränkt sich jedoch nicht nur auf theoretische Betrachtungen. Die auf den Berechnungen basierenden Ergebnisse werden in zahlreichen praktischen Experimenten überprüft. Die Experimente zeigen, dass die analytisch ermittelten Durchschlaglasten höher sind als die realen Lasten [Kollár 1975; Ramm 1977; Evkin 1997]. Demgegenüber werden in einer Arbeit von SUNAKAWA und ICHIDA Durchschlaglasten ermittelt, die bis zu 86% der theoretisch errechneten Lasten betragen. Des Weiteren können sie die verschiedenen Welligkeiten im Durchschlagpunkt, welche unter anderem von BUDIANSKY und WEINITSCHKE theoretisch beschrieben werden, experimentell nachweisen [Sunakawa 1974].

Der oft große Unterschied zwischen den realen und theoretischen Werten ist u. a. auf auftretende strukturelle Imperfektionen z. B. durch Fertigungsprozesse, Werkstoffeinflüsse, Eigenspannungen und unregelmäßige Belastungen sowie die Art und Weise der Einspannungen zurückzuführen. Es wird daher vorgeschlagen, die reale kritische Last q als das Produkt aus der theoretischen kritischen Last q^* und einer Konstante von 0,1 anzunehmen, siehe Gleichung (2.25) [Kollár 1975; Evkin 1997].

$$q = 0,1 q^* \quad (2.25)$$

Die Arbeiten von KOLLÁR und RAMM geben einen umfangreichen Überblick über vergangene praktische Experimente und deren Ergebnisse zum beschriebenen Sachverhalt. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle auf weitere Ausführungen diesbezüglich verzichtet.

2.4.2 Stand der Technik

Der Stand der Technik zeigt, wie in Tabelle 2.1 dargestellt ist, dass das Auftreten einer Instabilität in Form des mechanischen Durchschlages an rotationssymmetrischen Strukturen sehr vielfältig eingesetzt wird.

Tabelle 2.1: Funktionen und Anwendungen des Durchschlageffektes in der Technik

	1	2	3	4	5
Funktion	Lastgesteuerte Ventilfunktion	Feedback / taktile Kopplung	Kontakterzeugung	Druckausgleich	Diskreter Sensor
Anwendung	Flaschenverschluss, Entlüftung	Tastatur	Schalter, Taster	Flexible Dichtung, Berstscheibe	Drucksensor, Temperatursensor

Zu 1. Als lastgesteuerte Elemente werden z. B. in der Nahrungsmittelindustrie hochelastische Strukturen eingesetzt die es ermöglichen Flüssigkeitsbehälter reversibel zu öffnen und zu verschließen. Eine kreuzweise eingeschnittene Silikonmembran (Abbildung 2.26 (32)) kann in diesem Fall das funktionstragende Element sein. Es handelt sich dabei um einen Flaschenverschluss für Quetschflaschen mit vorwiegend flüssigem Inhalt.

Durch Quetschen der Flasche wird der Innendruck der Flasche erhöht, was schließlich zum Erhöhen der Belastung auf das Silikonventil führt. Durch den erhöhten Druck wird das Ventil nach außen gedrückt. Ab einem kritischen Druck wird die Struktur mechanisch instabil, schlägt nach außen durch und öffnet die Flasche (siehe Abbildung 2.25 und Abbildung 2.26; [Seaquist Closures Foreign 1996]).

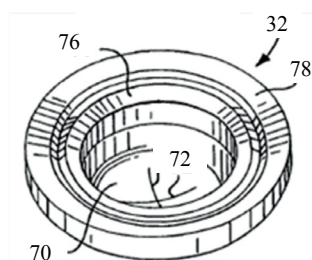


Abbildung 2.25: Druckgesteuertes Ventil [Seaquist Closures Foreign 1996]

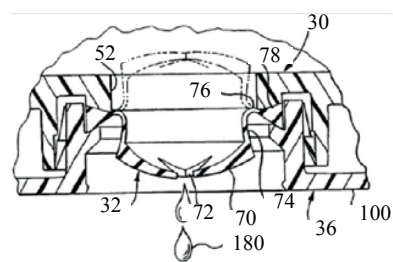


Abbildung 2.26: Druckgesteuertes Ventil, Schnittdarstellung [Seaquist Closures Foreign 1996]

Die beschriebene Ventilfunktion beruht auf der Nutzung von sich ändernden Druckbedingungen. Demgegenüber wird in einer Arbeit von KHUSAINOV ein sphärisch

geformtes Durchschlagelement aus einem TiNi Shape-Memory-Alloy beschrieben, welches für ein thermisch gesteuertes Ventil genutzt wird, Abbildung 2.27, (5).

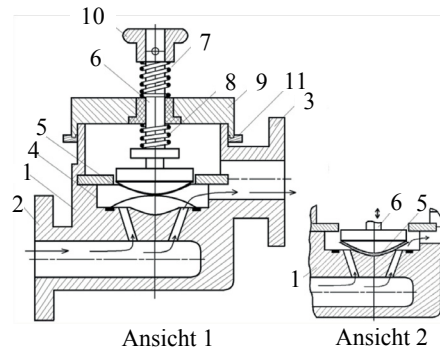


Abbildung 2.27: Cut-Off Thermo-Valve [Khusainov 2008]

Das Element wird über einen Stößel (6) verformt, wodurch sich das beschriebene Ventil im geöffneten Zustand befindet. Wird das Medium, welches das Ventil durchströmt, erhitzt, bewirkt die Temperaturänderung eine Spannungsänderung im Gefüge des Shape-Memory-Alloy-Elementes. Diese Spannungen führen ab einer bestimmten kritischen Temperatur dazu, dass sich das Element in seinen Ausgangszustand zurückverformt. Dieser Rückverformungsprozess erfolgt aufgrund der sphärisch gekrümmten Form des Elementes sprunghaft [Khusainov 2008].

Zu 2. Ein weiteres und auch sehr großes Anwendungsgebiet des Durchschlageffektes ist die Anwendung in Form von Feedback-gebenden Schaltervorrichtungen. Es existieren einfache Kontaktschalter bis hin zu kompliziert aufgebauten Tastaturtasten oder ganzen Bedienfeldern. Zumeist ist die durchschlagende Struktur auch die Kontaktgebende. Bei komplizierteren Aufbauten hingegen dienen sie meist zum Zurückstellen der Bedienelemente. Die folgenden Abbildungen zeigen Beispiele für Tastaturen, bei denen der Durchschlageffekt zur Feedback-Erzeugung genutzt und als Kontaktgeber Anwendung findet.

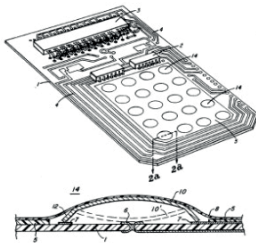


Abbildung 2.28: Tastatur
[Johnson 1981]

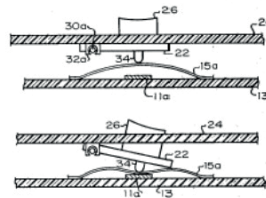


Abbildung 2.29: Taster mit
Feedbackgeber nach
[Misson 1982]

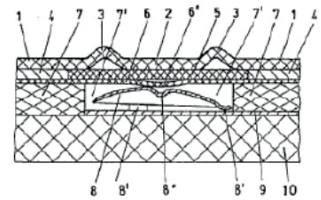


Abbildung 2.30: Taster mit
Feedbackgeber
[Tessendorf 1989]

Zu 3. Zur Kontakterzeugung, z. B. in einer Fahrzeuggetriebekontrolle, wird eine sphärisch geformte Kappe als ein Druckschalter eingesetzt, um die Position eines Magneten als logisches Signal an einen Mikroprozessor weiterzugeben. Der Druckschalter nutzt den Druck einer hydraulischen Strömung im Fahrzeuggetriebe, um den Magneten anzusteuern [Sanford 1988].

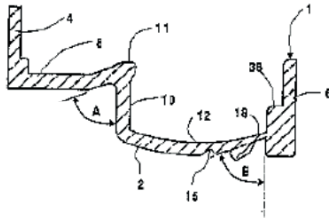


Abbildung 2.31: Schnittansicht einer rotationsymmetrischen unbelasteten Dichtung [Tucholski 1998]

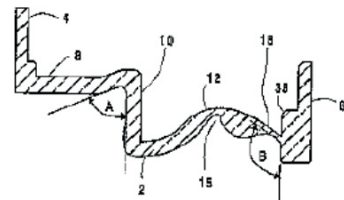


Abbildung 2.32: Schnittansicht einer rotationsymmetrischen belasteten Dichtung nach dem Durchschlag [Tucholski 1998]

Zu 4. In Abbildung 2.31 ist eine Struktur dargestellt, welche als eine ringförmige Dichtung in einer elektrochemischen Zelle angewendet wird. Diese Dichtung soll dafür sorgen, dass sich entwickelndes Gas nicht ausweichen und sich kein zu großer Druck aufbauen kann, der die Zelle beschädigen könnte, was letztlich zum Austritt des Gases führen würde. Die Dichtung ist so gestaltet, dass sie nach außen ausweicht bzw. durchschlägt, um den von innen wirkenden Druck abzubauen [Tucholski 1998].

Zu 5. Strukturen, welche den mechanischen Durchschlageffekt aufweisen, können zu den bisher genannten Funktionen auch als diskrete Sensoren eingesetzt werden. Durch geeignete Signalerfassung und Übertragung ist es möglich, das Verhalten für sensorische Zwecke einzusetzen. Im 3. Punkt wird beschrieben, wie eine sphärische Kappe zur Kontakterzeugung verwendet wird. Dieses Beispiel kann auch als Sensorfunktion interpretiert werden. Die Kontaktierung bedeutet z. B., dass ein bestimmter Druck erreicht wurde. Die angestrebten Untersuchungen haben zum Ziel, das Anwendungsfeld für technische Systeme mit Durchschlageffekt zu erweitern und zu vertiefen sowie die Qualität und das Verständnis für die anwendungsorientierte Entwicklung zu verbessern.

2.5 Berechnung von nichtlinearen Problemstellungen mit der Finite-Elemente-Methode

Das mechanische Durchschlagverhalten stellt einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Last und Verformung dar, siehe Kapitel 2.3. Aus diesem Grunde werden Durchschlagprobleme, und im Allgemeinen Stabilitätsprobleme, in den Bereich des nichtlinearen Strukturverhaltens eingeordnet. Zur Untersuchung und Berechnung solcher Verhaltenscharakteristika werden überwiegend iterative Lösungsverfahren eingesetzt, um die Problemstellung näherungsweise zu lösen. Nichtlineare Probleme aus der Strukturmechanik können unter der Nutzung der Finite-Elemente-Methode untersucht werden. Mithilfe der FEM werden die Gleichungsbeziehungen zwischen den äußeren Lasten und dem zugehörigen Verschiebungszustand auf numerische Weise gelöst. Der Einsatz der FEM im strukturmechanischen Bereich erlaubt es, hochkomplexe Geometrien und Strukturen zu analysieren. Zudem können verschiedenste Materialeigenschaften, z. B. Hyperelastizität, berücksichtigt und simuliert werden.

Zur Berechnung von Stabilitätsproblemen mit dem FEM-Softwarepaket ANSYS® stehen verschiedene Lösungsverfahren zur Auswahl. Dies sind zum einen das klassische NEWTON-RAPHSON-Verfahren und zum anderen das Kurvenverfolgungsverfahren in Form der Bogenlängenmethode. Diese beiden Algorithmen werden in den folgenden Abschnitten näher erläutert.

2.5.1 Lösungsverfahren

Zur Berechnung von Problemstellungen aus der Festkörpermechanik mit nichtlinearem Verhalten werden innerhalb der FEM iterative Lösungsmethoden eingesetzt. In diesem Abschnitt wird zunächst das allgemein zu lösende Gleichungssystem in seinen Grundzügen erläutert. Anschließend werden die in dieser Arbeit genutzten iterativen Lösungsmethoden vorgestellt.

Die zu untersuchenden nichtlinearen Probleme der Strukturmechanik ergeben in der Regel allgemeine nichtlineare partielle Differenzialgleichungssysteme. Werden finite Elemente zur Lösung der Gleichungen gewählt, so entsteht unter der Berücksichtigung von zeitunabhängigen Problemen ein System von nichtlinearen algebraischen Gleichungen in der Matrixform

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (2.26)$$

aus dem die unbekannten Variablen $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$ zu bestimmen sind, wobei N hier die Anzahl der Unbekannten angibt [Wriggers 2001].

Der Zusammenhang zwischen Belastung und Verformung wird, unter der Annahme einer existierenden Lösung in Gleichung (2.26), in der Regel mit iterativer Laststeigerung gelöst. Im Rahmen dieses Kapitels wird nur auf die numerischen Methoden zur Lösung dieser Gleichung eingegangen. Die Finite-Elemente-Methode stellt verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung von nichtlinearen Problemen zur Verfügung, da es kein iteratives Verfahren gibt, das alle Problemstellungen effizient und robust behandeln kann [Wriggers 2001].

Verschiedene Finite-Elemente-Approximationen führen auf ein System von nichtlinearen algebraischen Gleichungen mit einer Anzahl N an Unbekannten. Dieses Gleichungssystem kann für die nachstehenden Betrachtungen wie folgt beschrieben werden:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{P} = \mathbf{K}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} - \lambda \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N. \quad (2.27)$$

In Gleichung (2.27) wird der Skalierungsfaktor bzw. Lastparameter λ eingeführt, um bei der Bestimmung der Höhe des Lastniveaus eine weitere Variationsmöglichkeit zu erhalten [Wriggers, 2001]. Dieser Parameter ist im Allgemeinen durch die Aufgabenstellung vorgegeben. Weiterhin sind $\mathbf{R}(\mathbf{u})$ die den Elementspannungen in einem bestimmten Zu-

stand entsprechenden inneren Knotenkräfte und \mathbf{P} der Vektor für die auf die Struktur wirkenden Lasten (z. B. äußere Belastungen, Anfangsspannungen und Anfangsverzerrungen u. ä.). $\mathbf{K}(\mathbf{u})$ stellt die Steifigkeitsmatrix dar.

Eine ausführliche Herleitung des Gleichungssystems (2.27) wird an dieser Stelle nicht vorgenommen. Es soll jedoch auf die Bücher von Zienkiewicz 1974; Crisfield 1995; Wriggers 2001; Bathe 2002; und Klein 2007 hingewiesen werden. In diesen wird eine detaillierte und grundlegende Herleitung des Gleichungssystems (2.27) durchgeführt.

Das Gleichungssystem (2.27) wird durch die Anwendung eines iterativen Verfahrens gelöst. Häufige Verfahren zur Lösung der bei der Diskretisierung mittels der FEM entstehenden nichtlinearen Gleichungssysteme sind:

- Fixpunktverfahren oder Fixpunktiteration,
- Direkte Iteration,
- NEWTON-RAPHSON-Verfahren,
- Quasi-NEWTON-Verfahren,
- Dynamische Relaxation und
- Kurvenverfolgungsverfahren auf der Basis des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens [Wriggers 2001, Klein 2007].

2.5.2 NEWTON-RAPHSON-Verfahren

Das NEWTON-RAPHSON-Verfahren ist das wohl am häufigsten angewandte Verfahren zur iterativen Lösung von Systemen nichtlinearer, algebraischer Gleichungen [Wriggers 2001]. Die grundlegende Idee dieses Verfahrens besteht darin, den nichtlinearen Verformungspfad in einem Ausgangspunkt $(\mathbf{u}_0, \lambda_0)$ zu linearisieren, siehe Abbildung 2.33. Für die Linearisierung wird eine TAYLOR-Reihenentwicklung der Gleichung (2.27) an einem bereits bekannten Zustand \mathbf{u}_0 vorgenommen:

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}_n, \lambda) \equiv \mathbf{G}(\mathbf{u}_0, \lambda) + \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \right)_n \cdot \delta \mathbf{u}_n = \mathbf{0}. \quad (2.28)$$

In der TAYLOR-Reihe ergibt sich durch die Linearisierung bzw. partielle Ableitung des Vektors $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ eine Matrix, die auch als Tangentenmatrix bekannt ist und hier mit $\mathbf{K}_T(\mathbf{u})$ bezeichnet wird:

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \equiv \frac{\partial (\mathbf{R}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{P})}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K}_T(\mathbf{u}). \quad (2.29)$$

Es ergibt sich somit für jeden Iterationsschritt eine Verschiebungsänderung $\delta \mathbf{u}$ durch das lineare Gleichungssystem (2.30):

$$\delta \mathbf{u}_n = - \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \right)_n^{-1} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{u}_0, \lambda) \equiv -\mathbf{K}_T^{-1}(\mathbf{u}_n) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{u}_0, \lambda). \quad (2.30)$$

Die Probleme des Verfahrens entstehen, wenn der Anstieg der Tangente gegen Null geht oder, wie im Instabilitätspunkt, gleich Null ist. Geht der Anstieg der Tangente gegen Null, erhöht sich die Anzahl der Iterationen bis zum Erreichen der Lösung des Lastinkrements. Beim Erreichen des Punktes mit Nullanstieg der Tangente (auch singulärer Punkt genannt) ergibt sich in der Determinantenbildung aus der Tangentenmatrix $\det(\mathbf{K}_T(\mathbf{u}))$ ein theoretischer Wert von Null, und der Iterationsschritt schlägt fehl.

Im Durchschlagpunkt kommt es oftmals zum Abbruch der Simulation aufgrund der beschriebenen Konvergenzprobleme, wodurch sich nur Aussagen über die Verformung und das mechanische Verhalten im vorkritischen Bereich treffen lassen. Um den gesamten Verformungsverlauf zu ermitteln, muss schließlich ein anderes Berechnungsverfahren angewendet werden. Als weiterer Nachteil des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens ist zu nennen, dass in jedem Iterationsschritt die Steifigkeitsmatrix neu bestimmt und ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muss, was zu einem erhöhten Berechnungsaufwand führt.

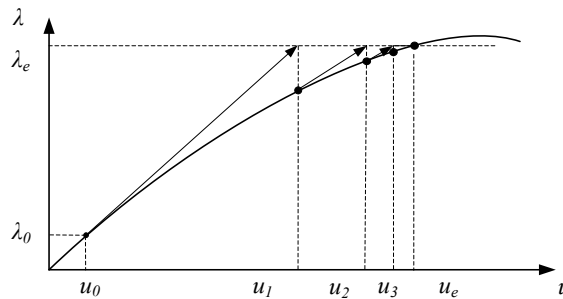


Abbildung 2.33: Schematische Darstellung des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens für eine nichtlineare Problemstellung mit einem Freiheitsgrad

2.5.3 Bogenlängenverfahren

Stabilitätsprobleme können im Allgemeinen Last-Verschiebungs-Kurven aufweisen, bei denen $\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{0}$ keine eindeutige Lösung für jeden Lastparameter λ besitzt. In derartigen Fällen ist es mit dem bisher beschriebenen Verfahren nicht mehr möglich, den Bereich nach dem Maximum der Kurve zu erreichen. Solche Kurven können die Gestalt wie in Abbildung 2.34 zeigen.

Die vollständige Verfolgung von allgemeinen nichtlinearen Lösungspfaden der Gleichung (2.27) ist von praktischem Interesse, wenn das Verhalten einer Tragstruktur im nachkritischen Bereich ermittelt werden soll. Mittels des im Folgenden erläuterten Lösungsverfahrens gelingt eine Pfadverfolgung auch dann, wenn auf den Lösungsverläufen singuläre Punkte vorhanden sind, an denen die Determinante der Tangentenmatrix gleich Null ist [Crisfield 1995; Wriggers 2001].

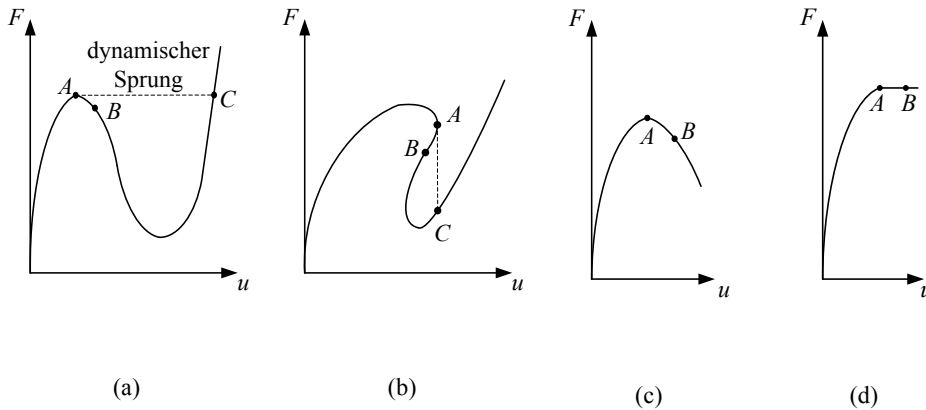


Abbildung 2.34: Verschiedene Last-Verschiebungs-Kurven der Stabilitätsprobleme: (a) – Durchschlag, (b) – Durchschlag mit Rückschlag, (c) – Versagen durch spröde Materialeigenschaften, (d) – Verhalten bei duktilen (zähen) Materialeigenschaften [Crisfield 1995]

Das Ziel des Bogenlängenverfahrens besteht im Allgemeinen darin, eine Nebenbedingung zu dem Satz von nichtlinearen Gleichungen aus (2.27) hinzuzufügen, um den noch unbekannten Lastparameter λ bestimmen zu können [Riks 1972; Wessels 1977; Schneider 1997; Wriggers 2001]. Zur Bestimmung von λ wird ein Schnittpunkt der Funktion (2.27) mit dieser Nebenbedingung ermittelt. Im Bogenlängenverfahren wird die Nebenbedingung im Allgemeinen durch (2.31) definiert:

$$f(\mathbf{u}, \lambda) = 0. \quad (2.31)$$

Nach der Methode von Crisfield wird die Nebenbedingung folgendermaßen dargestellt:

$$f = \sqrt{(\mathbf{d}\mathbf{u}^T \mathbf{d}\mathbf{u} + d\lambda^2 \psi^2 \mathbf{P}^T \mathbf{P})} - ds. \quad (2.32)$$

Die differenzielle Form aus Gleichung (2.32) wird beim Bogenlängenverfahren wie folgt diskretisiert ($\mathbf{d}\mathbf{u}$ wird zu $\Delta\mathbf{u}$ und $d\lambda$ wird zu $\Delta\lambda$) und Null gesetzt

$$(\Delta\mathbf{u}^T \Delta\mathbf{u} + \Delta\lambda^2 \psi^2 \mathbf{P}^T \mathbf{P}) - \Delta s^2 = 0, \quad (2.33)$$

wobei Δs ein fester Radius zum gewünschten Schnittpunkt ist und der Vektor $\Delta\mathbf{u}$ und das Skalar $\Delta\lambda$ Inkremente sind, die im Startgleichgewicht existieren. In dieser Form kann sowohl der Verschiebungsvektor \mathbf{u} sowie der Laststeigerungsfaktor λ variiert werden. Da sich die Schrittweite Δs in der Nebenbedingung (2.32) auf \mathbf{u} , wie auch auf λ verteilt, verfügt Δs nicht über die korrekten Einheiten. Aus diesem Grund muss der Skalierungsparameter ψ eingeführt werden. Je größer ψ wird, desto mehr entspricht das Verfahren der Laststeuerung, wohingegen $\psi = 0$ einer Verschiebungssteuerung gleichkommt [Hübner 2010].

Durch die Einführung der Nebenbedingung ist es also möglich, den Lastfaktor λ zu variieren und diesen im Gleichungssystem (2.27) als eine zweite Variable zu definieren. Das so entstandene Gleichungssystem wird unter der Berücksichtigung von (2.33) mithilfe des NEWTON-RAPHSON-Verfahren berechnet, d. h. es wird eine TAYLOR-Reihe für das Gleichungssystem (2.27) und für (2.33) an einem bekannten Punkt entwickelt und nach den unbekannten Größen \mathbf{u} und λ aufgelöst. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{u}_n, \lambda_n) &\equiv \mathbf{G}(\mathbf{u}_0, \lambda_0) + \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \right)_n \delta \mathbf{u}_n + \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \lambda_n} \right) \delta \lambda_n \\ &= \mathbf{G}(\mathbf{u}_0, \lambda_0) + \mathbf{K}_T \delta \mathbf{u}_n - \mathbf{P} \delta \lambda_n = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$f_n = f_0 + 2 \Delta \mathbf{u}_n^T \delta \mathbf{u}_n + 2 \Delta \lambda_n \delta \lambda_n \psi^2 \mathbf{P}^T \mathbf{P} = 0. \quad (2.35)$$

Aufgrund der Suche des gemeinsamen Schnittpunktes werden (2.34) und (2.35) gleich gesetzt, und es ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \delta \mathbf{u}_n \\ \delta \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{P} \\ 2 \Delta \mathbf{u}_n^T & 2 \Delta \lambda_n \psi^2 \mathbf{P}^T \mathbf{P} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{u}_0, \lambda_0) \\ f_0 \end{pmatrix}, \text{ wobei} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{P} \\ 2 \Delta \mathbf{u}_n^T & 2 \Delta \lambda_n \psi^2 \mathbf{P}^T \mathbf{P} \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} wird nun nicht mehr singulär, auch wenn \mathbf{K}_T singulär wird. Dadurch ist die Überschreitung eines kritischen Punktes wieder möglich.

Nach der Methode von Crisfield kann, anstatt die Gleichungen aus (2.36) direkt zu lösen, eine Nebenbedingung für (2.35) aufgestellt werden, indem eine Verschiebungskontrolle an einem bekannten Punkt verwendet wird [Crisfield 1981]. Bei der Verschiebungskontrolle wird von einem bekannten Punkt ausgegangen und eine neue definierte Verschiebung in das System eingebracht.

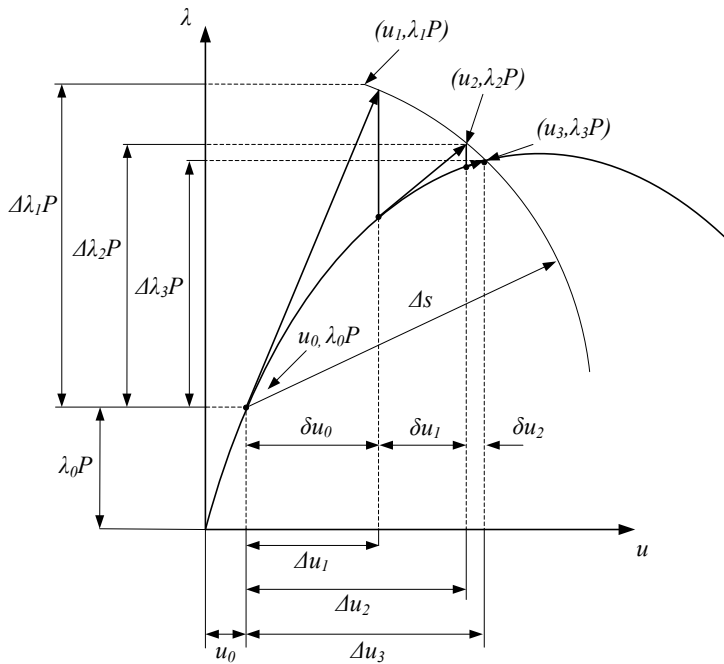


Abbildung 2.35: Schematische Darstellung des Bogenlängenverfahrens nach Crisfield für die Lösung eines nichtlinearen Problems mit instabilem Verhalten und einem Freiheitsgrad [Crisfield 1995]

Anschließend werden die daraus resultierenden inneren Kräfte \mathbf{R} und äußeren Kräfte \mathbf{P} ermittelt. Infolgedessen ergibt sich wiederum für die Änderung bei einer neuen unbekannten Belastung mit

$$\lambda_n = \lambda_0 + \delta\lambda_n \quad (2.38)$$

folgender Zusammenhang:

$$\delta\mathbf{u}_n = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{u}_0, \lambda) = -\mathbf{K}_T^{-1} (\mathbf{R}(\mathbf{u}_0) - \lambda_n \mathbf{P}) = -\mathbf{K}_T^{-1} (\mathbf{G}(\mathbf{u}_0, \lambda_0) - \delta\lambda_n \mathbf{P}). \quad (2.39)$$

Nach weiterer Vereinfachung ist:

$$\delta\mathbf{u}_n = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{u}_0, \lambda_0) + \delta\lambda_n \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P} = \delta\bar{\mathbf{u}} + \delta\lambda_n \delta\mathbf{u}_t \quad \text{mit} \quad \delta\mathbf{u}_t = -\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P}. \quad (2.40)$$

Mithilfe der Verschiebungskontrolle wurde $\delta\mathbf{u}_n$ in zwei Teile gesplittet. Hierbei bedeutet $\delta\bar{\mathbf{u}}$ die iterative Änderung zu einem festen Lastniveau λ_0 , welche vom standardmäßigen lastgesteuerten NEWTON-RAPHSON-Verfahren stammt. Weiterhin ist $\delta\mathbf{u}_t$ der Verschiebungsvektor, welcher zum festen Lastvektor \mathbf{P} gehört. Wird $\delta\mathbf{u}_n$ über Gleichung (2.28) ermittelt (während $\delta\lambda_n$ weiterhin unbekannt ist), so lautet die neue inkrementelle Verschiebung:

$$\Delta\mathbf{u}_n = \Delta\mathbf{u}_0 + \delta\mathbf{u}_n = \Delta\mathbf{u}_0 + \delta\bar{\mathbf{u}} + \delta\lambda \delta\mathbf{u}_t. \quad (2.41)$$

Die Unbekannte $\delta\lambda_n$ kann nun mithilfe der Nebenbedingung nach Gleichung (2.33) ermittelt werden. Es folgt:

$$\left(\Delta\mathbf{u}_0^T \Delta\mathbf{u}_0 + \Delta\lambda_0^2 \psi^2 \mathbf{P}^T \mathbf{P} \right) = \left(\Delta\mathbf{u}_n^T \Delta\mathbf{u}_n + \Delta\lambda_n^2 \psi^2 \mathbf{P}^T \mathbf{P} \right) = \Delta s^2. \quad (2.42)$$

Durch Einsetzen von (2.41) in (2.42) ergibt sich nachstehende quadratische Gleichung

$$b_1 \delta\lambda_n^2 + b_2 \delta\lambda_n + b_3 = 0, \quad (2.43)$$

wobei

$$b_1 = \delta\mathbf{u}_t^T \delta\mathbf{u}_t + \mathbf{P}^T \mathbf{P}, \quad (2.44)$$

$$b_2 = 2\delta\mathbf{u}_t (\Delta\mathbf{u}_0 + \delta\bar{\mathbf{u}}) + 2\Delta\lambda_0 \psi^2 \mathbf{P}^T \mathbf{P}, \quad (2.45)$$

$$b_3 = (\Delta\mathbf{u}_0 + \delta\bar{\mathbf{u}})^T (\Delta\mathbf{u}_0 + \delta\bar{\mathbf{u}}) - \Delta s^2 + \Delta\lambda_0^2 \psi^2 \mathbf{P}^T \mathbf{P}. \quad (2.46)$$

Durch die Gleichung (2.43) kann $\delta\lambda_n$ berechnet werden, sodass eine Änderung vollständig definiert ist.

In Anlehnung an Abbildung 2.35 soll der Prozess der Methode aber nochmals für den zweiten Schritt erläutert werden. Es existiert ein konvergierter Gleichgewichtspunkt $(\mathbf{u}_0, \lambda_0 \mathbf{P})$. In diesem wird eine inkrementelle Tangente angelegt. Diese schneidet das definierte Bogensegment im Punkt $(\mathbf{u}_1, \lambda_1 \mathbf{P})$. Analog wird nach (2.43) - (2.46) $\delta\mathbf{u}_1$ und $\delta\lambda_1$ mit $\Delta\mathbf{u}_0$ als $\Delta\mathbf{u}_1$ und $\Delta\lambda_0$ als $\Delta\lambda_1$ ermittelt. Anschließend gestaltet sich die Aktualisierung nach (2.41), wie folgt:

$$\Delta\mathbf{u}_2 = \Delta\mathbf{u}_1 + \delta\mathbf{u}_1, \quad \Delta\lambda_2 = \Delta\lambda_1 + \delta\lambda_1. \quad (2.47)$$

Nach dem nächsten Durchlauf wird die Aktualisierung schließlich zu

$$\Delta\mathbf{u}_3 = \Delta\mathbf{u}_2 + \delta\mathbf{u}_2, \quad \Delta\lambda_3 = \Delta\lambda_2 + \delta\lambda_2. \quad (2.48)$$

Die Iteration wird solange weitergeführt, bis das Konvergenzkriterium des Gleichgewichtspfades erfüllt ist [Crisfield 1995].

2.6 Das MOONEY-RIVLIN-Materialmodell

Ein weiterer Schwerpunkt in dieser Arbeit, ergänzend zur Untersuchung des allgemeinen Durchschlagverhaltens von rotationssymmetrischen Strukturen, ist der Einsatz von nichtlinear elastischen Materialien. Um das mechanische Verhalten nichtlinear elastischer Materialien zu berechnen und zu simulieren, wurde in der Vergangenheit eine Vielzahl von Materialmodellen entwickelt. Das sind zum Beispiel das Neo-HOOKE-Materialmodell, das OGDEN-Materialmodell, das YEOH-Materialmodell und das MOONEY-RIVLIN-Materialmodell.

Die genannten Materialmodelle beruhen darauf, dass das nichtlinear elastische Material die Bedingung der Hyperelastizität erfüllt. Ein Material gilt als hyperelastisch, wenn eine Verformungsenergiedichtefunktion W existiert, die eine skalare Funktion des Dehnungs- oder Verformungstensors ist. Die Verformungsenergiedichtefunktion W gibt die notwendige Energie an, die benötigt wird, um einen Körper zu verformen. Der Zusammenhang zwischen W und dem Dehnungstensor wird durch den zweiten PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensor \mathbf{S} in Gleichung (2.49) beschrieben:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (2.49)$$

Der Dehnungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ kann mithilfe des LAGRANGE'schen Dehnungstensors in folgender Form dargestellt werden:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \boldsymbol{\delta}). \quad (2.50)$$

Der LAGRANGE'sche Dehnungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ wiederum beinhaltet Komponenten des CAUCHY-GREEN-Verformungstensors \mathbf{C} mit dem Verformungsgradienten \mathbf{F} :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \quad (2.51)$$

Zur weiteren Berechnung ist die Ermittlung der Eigenwerte des CAUCHY-GREEN-Verformungstensors durchzuführen. Es existieren $\lambda_{s1}^2, \lambda_{s2}^2$ und λ_{s3}^2 , wenn

$$\det[\mathbf{C} - \lambda_s^2 \boldsymbol{\delta}] = 0 \quad (2.52)$$

ist. Die Lösung der Determinante ergibt:

$$\lambda_s^6 - I_1 \lambda_s^4 + I_2 \lambda_s^2 - I_3 = 0. \quad (2.53)$$

I_1 , I_2 und I_3 sind die Invarianten des CAUCHY-GREEN-Verformungstensors. Dieser ist ein Tensor 2. Stufe, wodurch sich die Invarianten, mit λ_e als Streckung der jeweiligen Richtung, wie folgt ergeben:

$$I_1 = \lambda_{s1}^2 + \lambda_{s2}^2 + \lambda_{s3}^2, \quad (2.54)$$

$$I_2 = \lambda_{s1}^2 \lambda_{s2}^2 + \lambda_{s2}^2 \lambda_{s3}^2 + \lambda_{s1}^2 \lambda_{s3}^2, \quad (2.55)$$

$$I_3 = \lambda_{s1}^2 \lambda_{s2}^2 \lambda_{s3}^2. \quad (2.56)$$

Bei den nichtlinear elastischen Materialien, die hier beschreiben werden, wird von Inkompressibilität ausgegangen, was dazu führt, dass I_3 mit 1 angenommen wird, weil keine Volumenänderung stattfindet.

Eine Verformungsenergiedichtefunktion W , wie sie von Mooney-Rivlin vorgestellt wird, kann das nichtlinear elastische Materialverhalten gummiartiger Werkstoffe in guter Näherung abbilden, wenn Dehnungen zwischen 30 % im Druckbereich und 100 % im Zugbereich vorliegen. Die Verformungsenergiedichtefunktion W nach Mooney-Rivlin lautet:

$$W = \sum_{i+k=1}^m a_{ik} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^k + \frac{1}{2} \kappa (I_3 - 1). \quad (2.57)$$

In der Gleichung (2.57) ist κ der Kompressionsmodul und m gibt den Grad des Modells an, wobei m von 1 bis 3 sein kann. Es ergibt sich für $m = 1$ eine Funktion mit zwei Mooney-Rivlin-Parametern a_{ik} , bzw. mit fünf für $m = 2$ oder neun für $m = 3$. Die Funktion mit zwei Parametern stellt eine Funktion ohne Wendepunkt dar, mit fünf Parametern eine Funktion mit einem Wendepunkt und mit neun eine Funktion mit zwei Wendepunkten. In der weiteren Arbeit wird mit einem Materialmodell 2. Ordnung gearbeitet.

3. Untersuchung des Durchschlagverhaltens von sphärischen Strukturen

Die theoretischen Untersuchungen an dünnwandigen sphärischen Strukturen, wie in Abschnitt 2.2.1 beschrieben, beschränkten sich zum größten Teil auf flache sphärischen Strukturen aus Materialien mit linear elastischem Verhalten. Im Gegensatz zu den meisten bisherigen Arbeiten zur Behandlung des Durchschlagverhaltens von sphärischen Strukturen finden die folgenden Betrachtungen unter der Nutzung der rechner- und softwaregestützten Finite-Elemente-Methode und für Materialien mit nichtlinear elastischem Verhalten statt. Weiterhin werden sphärische Strukturen untersucht, welche nicht mehr den flachen und dünnwandigen Strukturen zuzuordnen sind, siehe dazu Abschnitt 2.3. Da dicke Strukturen aufgrund ihrer geometrischen Eigenschaften, dass eine Abmessung nicht mehr als klein gegenüber einer anderen angesehen werden kann, als Volumenkörper betrachtet werden müssen, wurden diese in der Mehrzahl der bisherigen Forschungsbeiträge ausgegrenzt. Ein weiterer Grund für die Weiterführung der Durchschlaguntersuchungen in dieser Arbeit ist, dass der Einsatz von nichtlinear elastischen Materialien zu neuen technischen Konzepten und Anwendungsfeldern führt. Denkbare Anwendungen sind z. B. im Bereich der Solarthermie zu finden. Für den Bereich der Solarthermie können durch die Nutzung des instabilen Verhaltens von Strukturen aus nichtlinear elastischem Material neuartige Konzepte für Entlüftungsventile erstellt und zur Anwendung gebracht werden. Ein weiteres Anwendungsfeld ist die Medizintechnik. Im Bereich der Prothetik können die Forschungsergebnisse und die darauf basierenden Schlussfolgerungen in die Entwicklung neuartiger biomedizinischer implantierbarer Ventile fließen. Daher ist die Schaffung neuer Grundlagen von herausragender Bedeutung.

3.1 Das FEM-Modell

Das FEM-Modell wird mit dem FEM-Programmsystem ANSYS[®] erstellt und berechnet. Die untersuchten sphärischen Strukturen sind rotationssymmetrisch bezüglich der y -Achse, Abbildung 3.2. Aufgrund der rotationssymmetrischen Geometrie einer sphärischen Struktur kann zu Beginn der Untersuchungen eine Vereinfachung des Modells vorgenommen werden. Bei dem Modell wird ein rotationssymmetrisches Verformungsver-

halten vorausgesetzt. Die vereinfachte Betrachtung verringert den Aufwand der Modellierung und spart einen Großteil der erforderlichen Rechenzeit ein.

Zur Erstellung der Geometrie werden die in Abbildung 3.1 dargestellten Größen berücksichtigt. Nachdem die Geometrie modelliert ist, werden die erforderlichen Randbedingungen definiert. Es wird für alle Knoten, die auf der y -Achse liegen, eine reibungsfreie Lagerung, Abbildung 3.2 A, mit einem Freiheitsgrad $f = 1$ definiert. Die Lagerung ermöglicht daher nur eine translatorische Bewegung entlang der y -Achse. Weiterhin werden alle Knoten, die sich auf der x -Achse befinden, *fest* eingespannt, Abbildung 3.2 B. Anschließend wird die Geometrie mit einem gleichmäßig verteilten Druck, Abbildung 3.2 Größe p , auf der Außenseite belastet. In Abbildung 3.3 ist zur Veranschaulichung der rotationsymmetrischen Gestalt die sphärische Struktur in einer 180°-Expansion dargestellt.

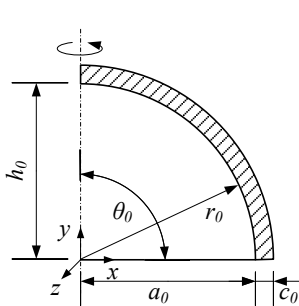


Abbildung 3.1: Geometrie der sphärischen Referenzstruktur

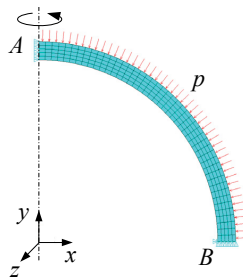


Abbildung 3.2: FEM-Modell der sphärischen Referenzstruktur

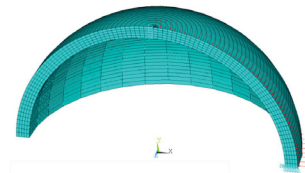


Abbildung 3.3: 180°-Expansion des rotationssymmetrischen FEM-Modells

Das Modell wird mit einem 2D-Element vernetzt (*plane182*) 2D-Element mit linearer Ansatzfunktion). Über die Key-Optionen werden die Eigenschaften für Rotationssymmetrie aktiviert. Des Weiteren wird für die Materialdefinition das MOONEY-RIVLIN-Materialmodell verwendet. Während der Berechnungen wird das MOONEY-RIVLIN-Materialmodell zweiter Ordnung beziehungsweise mit fünf Parametern verwendet, da die Verformungsenergiedichtefunktion W nach MOONEY-RIVLIN in der Form mit fünf Parametern einen Kurvenverlauf mit einem Wendepunkt abbilden kann. Weiterhin wird für die Berechnungen in der vorliegenden Arbeit das Material ELASTOSIL R420/50C1 der Firma Wacker Chemie verwendet. Das Material wird mithilfe eines uniaxial durchgeführten Zugversuchs analysiert und der Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang der „wahren“ Größen aufgestellt. Über eine „Curve fitting“-Methode wird das MOONEY-RIVLIN-

Materialmodell an die Spannungs-Dehnungs-Kurve aus dem Zugversuch angepasst, und die MOONEY-RIVLIN-Parameter werden ermittelt, siehe Anhang B und [Risto 2006]. Die MOONEY-RIVLIN-Parameter dienen als Materialkonstanten, die dem FEM-Modell beziehungsweise dem FEM-Programm übergeben werden. Weiterhin erfolgt die Berechnung der Strukturen mit dem Bogenlängenverfahren, wie es von CRISFIELD vorgestellt wurde [Crisfield 1981], siehe Abschnitt 2.5.

3.2 FEM-Berechnungen und deren Auswertung

Zu Beginn der Analysen wird eine Referenzgeometrie in Form einer Halbsphäre mit einem Radius $r_0 = 10$ mm, einer Wandstärke $c_0 = 1$ mm und einer Höhe $h_0 = 10$ mm festgelegt, siehe Abbildung 3.1 bis Abbildung 3.3. Die ermittelten Größen an der Referenzstruktur aus den Berechnungen, wie Verschiebungen u , Spannungen σ , Dehnungen ε und kritische Lasten p_k , erhalten den Index θ .

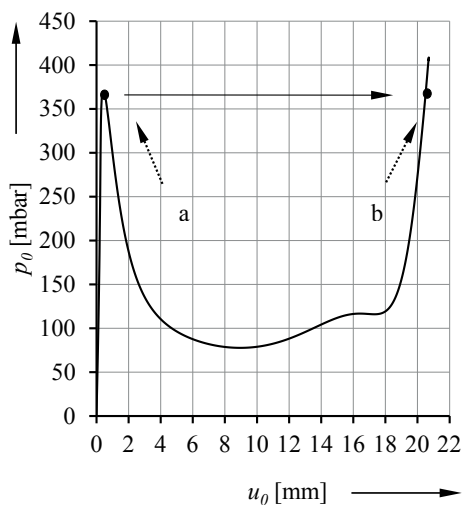


Abbildung 3.4: Druck-Verschiebungs-Diagramm der sphärischen Referenzstruktur unter der Beobachtung des Scheitelpunktes P_S

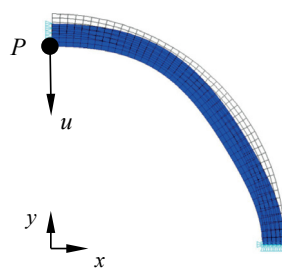


Abbildung 3.5: Verformtes FEM-Modell im Punkt a bei anliegender kritischer Belastung, siehe Abbildung 3.4, die zum Durchschlag führt (sphärische Referenzstruktur)

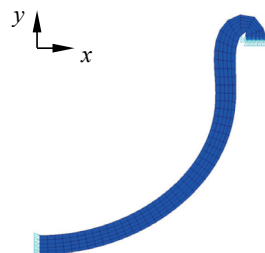


Abbildung 3.6: Verformtes FEM-Modell der sphärischen Referenzstruktur nach dem Durchschlag im Punkt b, siehe Abbildung 3.4

Die Festlegung einer sphärischen Referenzstruktur rührt daher, dass BUDIANSKY u.a. die bisher durchgeführten Untersuchungen auf die kritischen Lasten einer Vollkugelschale nach ZOELLY 1915 referenzierten. Da die ZOELLY-Last nach Gleichung (2.23) linear-elastisches Material- und geometrisch lineares Verformungsverhalten voraussetzt, wird eine neue Referenzstruktur mit nichtlinearem Verhalten berechnet. Weiterhin gestattet die Annahme, dass die geometrischen Änderungen an der sphärischen Struktur, die im Laufe der Untersuchungen vorgenommen werden, vergleichbar sind. Alle ermittelten Ergebnisse werden mit den Berechnungen dieser Referenz ins Verhältnis gesetzt, wodurch eine dimensionslose Betrachtung der ermittelten Größen erfolgen kann. Um einen Zusammenhang der geometrischen Parameter zueinander darzustellen, werden die Größen h und c bzw. r und c , in Anlehnung an die Gleichungen (2.23) und (2.24), ins Verhältnis gesetzt. Weiterhin wird das Verhältnis h/r auf maximal eins begrenzt. Das bedeutet, dass nur sphärische Strukturen mit einem Öffnungswinkel $\theta \leq 90^\circ$ untersucht werden.

Das Durchschlagverhalten elastischer Strukturen wird durch einen Last-Verschiebungs-Verlauf charakterisiert, so wie er in Abschnitt 2.3 beschrieben wird. Die Druck-Verschiebungs-Verläufe der zu analysierenden sphärischen Strukturen werden für den Scheitelpunkt P_S der Strukturen aufgezeichnet. Anschließend werden die erhaltenen Kurven und die auftretenden mechanischen Reaktionen, wie z. B. die Gesamtverformungen und Spannungen, ausgewertet.

Der Verlauf in Abbildung 3.4 zeigt den Druck-Verschiebungs-Zusammenhang der sphärischen Referenzstruktur bei Beobachtung des Scheitelpunktes P_S . Abbildung 3.5 und Abbildung 3.6 stellen die verformte sphärische Referenzstruktur bei anliegender kritischer Last und nach dem Durchschlagen dar.

3.2.1 Zusammenhang zwischen den kritischen Lasten und den geometrischen Abmessungen der untersuchten sphärischen Strukturen

Während der Untersuchungen an den sphärischen Strukturen werden die definierten geometrischen Parameter in einem vorgegebenen Bereich variiert, um deren Einfluss auf die kritischen Lasten zu ermitteln. Das Verhältnis der Höhe h zur Wandstärke c wird von 1 bis 20, und das Verhältnis des Grundradius r zur Wandstärke c wird von 3 bis 20 erhöht, siehe Abbildung 3.7 bis Abbildung 3.8. Um das Durchschlagverhalten von dicken

und hohen sphärischen Strukturen zu zeigen, werden die Verhältniswerte bis 20 erhöht. Strukturen mit größeren Verhältnissen als $h/c = r/c = 20$ können als dünne sphärische Strukturen beziehungsweise reine sphärische Schalenstrukturen betrachtet werden. Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit ist jedoch auf Strukturen gerichtet, welche im Grenzbereich der Definition einer Schale angesiedelt sind. Im Allgemeinen kann eine sphärisch gekrümmte Struktur als Schale definiert werden, wenn das Verhältnis $a/c \geq 10$ ist (a = Radius des Horizontalkreises in der Ebene).

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen den Abmessungen h , r , c und der kritischen Last p_k dargestellt und gezeigt, dass die Veränderung der geometrischen Abmessungen der sphärischen Strukturen verschiedene Last-Verschiebungs-Muster zur Folge haben.

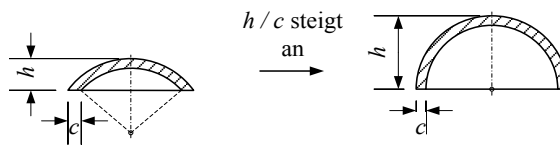


Abbildung 3.7: Schematische Darstellung einer flachen und hohen sphärischen Struktur durch Erhöhung von h/c

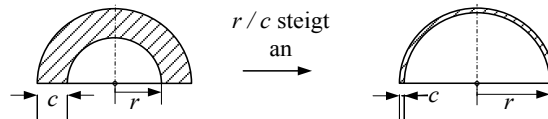


Abbildung 3.8: Schematische Darstellung einer dicken und dünnen sphärischen Struktur durch Erhöhung von r/c

In Abbildung 3.9 bis Abbildung 3.11 sind die Verläufe der kritischen Last p_k / p_{k0} in Abhängigkeit vom Verhältnis h/c bei verschiedenen Werten für r/c dargestellt. Die Kurven zeigen den Funktionsverlauf des Druckverhältnisses zu h/c , dabei ist r/c der Scharparameter. Bei den jeweiligen Kurven wird r/c konstant gehalten, z. B. $r/c = 3$, und das Verhältnisse h/c wird von Null an variiert, wobei in den folgenden Abbildungen nur die geometrischen Verhältnisse dargestellt sind, bei denen instabiles Verhalten auftritt. Wenn die Verhältnisse gleich sind, stellt die sphärische Struktur eine Halbsphäre mit einem Öffnungswinkel θ von 90° dar.

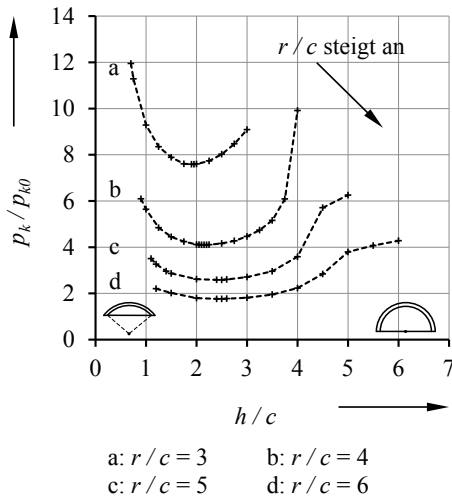


Abbildung 3.9: Verlauf der kritischen Last p_k / p_{k0} in Abhängigkeit vom geometrischen Verhältnis h / c bei $r / c = 3, \dots, 6$

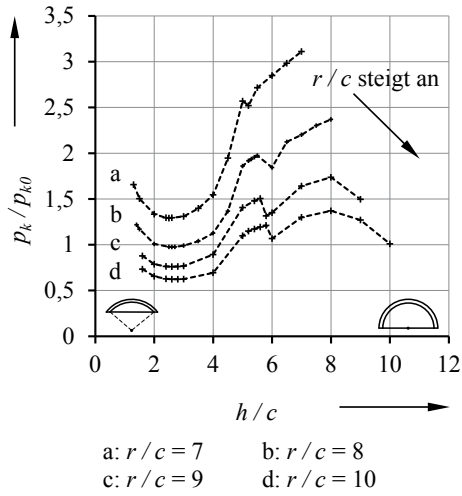


Abbildung 3.10: Verlauf der kritischen Last p_k / p_{k0} in Abhängigkeit vom geometrischen Verhältnis h / c bei $r / c = 7, \dots, 10$

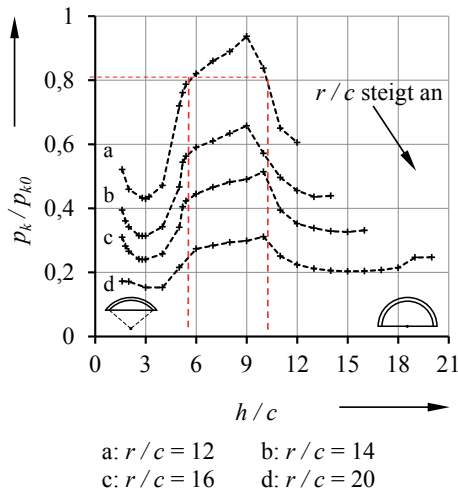


Abbildung 3.11: Verlauf der kritischen Last p_k / p_{k0} in Abhängigkeit vom geometrischen Verhältnis h / c bei $r / c = 12, \dots, 16$ und 20

Die Verläufe lassen mehrere lokale Extremstellen erkennen. Hierbei zeigen sphärischen Strukturen mit $r / c = 2, \dots, 6$, Abbildung 3.9, ein lokales Minimum und Strukturen mit $r / c = 7, \dots, 10$, Abbildung 3.10, zwei lokale Minima und ein bis zwei lokale Maxima. Sphärischen Strukturen mit $r / c = 12, 14, 16$ und 20 , Abbildung 3.11, - diese können auch

als sehr dünn bezogen auf das Verhältnis a/c angesehen werden - hingegen zeigen generell ein Minimum und ein Maximum. Eine Ausnahme bildet der Graph für das Verhältnis $r/c = 20$ bei dem ein zweites Minimum existiert. Weiterhin zeigen die Kurven, dass sich die globalen Maxima mit Vergrößerung von r/c in Richtung größerer Werte für h/c verschieben. Um die Änderung der Lage der globalen Extremstellen auch in anderer Form darzustellen, ist in Abbildung 3.12 und Abbildung 3.13 h/r in Abhängigkeit vom Verhältnis c/r abgebildet. Die Kurve in Abbildung 3.12 zeigt, dass mit Vergrößerung von c/r die Werte von h/r nahezu linear ansteigen. Das bedeutet, wenn mit der sphärischen Struktur eine möglichst geringe kritische Last realisiert werden soll, so muss $h/c \approx 2,41$ - Anstieg der Kurve in Abbildung 3.12 - bei $r/c = 3, \dots, 20$ betragen. Für den Verlauf der globalen Maxima ist ein ähnliches Verhalten in Abbildung 3.13 dargestellt. Durch die Kurve ist erkennbar, dass sphärische Strukturen mit denen eine maximale kritische Last erzielt werden soll, durch ein Verhältnis von $h/c \approx 8,44$ - Anstieg der Kurve in Abbildung 3.13 - gekennzeichnet sind.

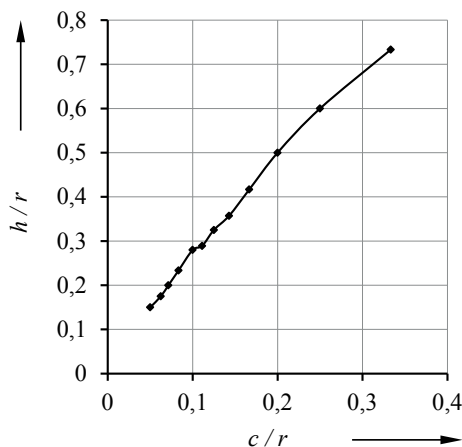


Abbildung 3.12: Verlauf des globalen Minimums der kritischen Last je r/c -Verhältnis mit der Abhängigkeit h/r (c/r)

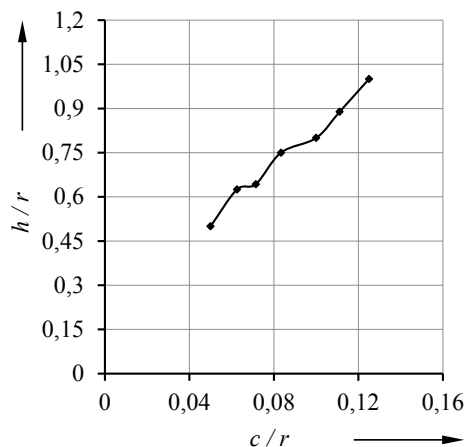


Abbildung 3.13: Verlauf des globalen Maximums der kritischen Last p_k / p_{k0} je r/c -Verhältnis mit der Abhängigkeit h/r (c/r)

Die weitere Auswertung der Verläufe zeigt, dass unterschiedliche Werte für das Verhältnis h/c existieren, die zu einer identischen kritischen Last führen. Daraus lässt sich schließen, dass es flache *und* hohe sphärische Strukturen gibt, aus denen, trotz ihrer unterschiedlichen geometrischen Eigenschaften, gleiche kritische Lasten resultieren, siehe Abbildung 3.11 rote Linien, für eine ausgewählte sphärische Struktur.

Die Abhängigkeit der kritischen Last vom Verhältnis r/c bei konstantem Wert von h/c ist in Abbildung 3.14 dargestellt. Diese lässt eine Potenzfunktion mit negativer Potenz erkennen, d. h., dass mit steigendem Wert von r/c die kritische Last p_k/p_{k0} stark abnimmt.

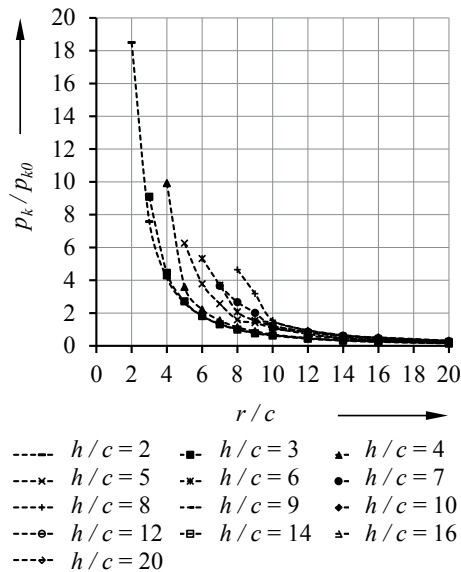


Abbildung 3.14: Verlauf der kritischen Last p_k/p_{k0} in Abhängigkeit vom geometrischen Verhältnis r/c mit $h/c = 2, \dots, 10, 12, 14, 16, 20$

In Abbildung 3.15 sind die gezeigten Verläufe der kritischen Lasten nochmals in normierter Form bezüglich der maximal auftretenden kritischen Last jeder einzelnen Kurve abgebildet. Die Abbildung zeigt, dass die Kurven sich stark ähneln und mit steigendem r/c ($r/c = 12, 14, 16, 20$) weiter annähern. Diese sphärischen Strukturen fallen zum Teil unter die Definition einer Schale. Hingegen werden die Strukturen mit kleineren r/c -Verhältnissen ($r/c = 2, \dots, 10$), bei denen die Wandstärke nicht als klein gegenüber einer anderen angenommen wird, als dicke Strukturen bezeichnet. Die Kurven zeigen auch, dass sich die Maxima mit weiterer Näherung zur Schalengeometrie in Richtung höherer h/c -Verhältnisse verschieben. Zusammenfassend ist mit der Darstellung in Abbildung 3.15 der steigende Einfluss einer wachsenden Wandstärke c bzw. eines kleiner werdenden Grundradius r auf die Maxima und Minima der Durchschlaglasten erkennbar.

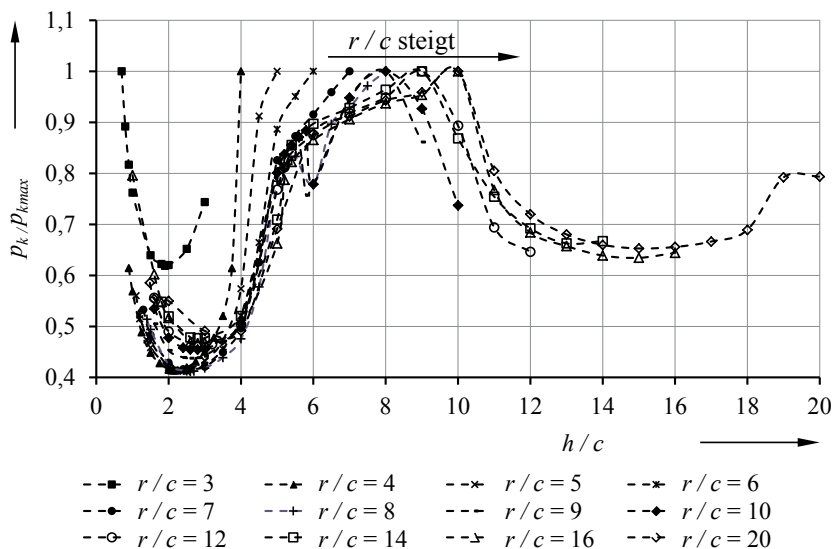


Abbildung 3.15: Verläufe der kritischen Lasten in Abhängigkeit von h/c mit Normierung auf den jeweiligen Maximalwert pro r/c -Verhältnis ($r/c = 2, \dots, 10, 12, 14, 16, 20$)

3.2.2 Durchschlagcharakteristik in Abhängigkeit von den geometrischen Abmessungen der untersuchten sphärischen Strukturen

Die Untersuchungen der auftretenden Druck-Verschiebungs-Verläufe ergeben weiter, dass die Verläufe qualitativ charakterisierbar sind und es existieren Parameterbereiche, denen verschiedene Durchschlagcharakteristiken zuzuordnen sind.

Es ist ein Bereich für die geometrischen Abmessungen erkennbar, in dem sphärische Strukturen kein Durchschlagverhalten aufweisen, vgl. Abbildung 3.16 blauer Bereich. Solche sehr flachen sphärischen Strukturen (z. B. $h/c = 1$ und $r/c = 8$) verfügen bei gleichmäßiger Druckbelastung ausschließlich über ein stabiles Verhalten. Es treten keine Extrempunkte oder auch kritische Punkte in der Last-Verformungs-Kurve auf. Mit Vergrößerung der Höhe h treten Bereiche für die geometrischen Verhältnisse auf, in denen die Strukturen eine Mono-Durchschlagcharakteristik im Last-Verformungs-Verlauf aufweisen, d. h. es existiert ein oberer kritischer Punkt, siehe Abbildung 3.16 graue Bereiche und Anhang A Kurve 1. Weiterhin gibt es einen Bereich, in dem das Last-Verformungs-Verhalten über mehr als einen oberen kritischen Punkt verfügt und somit als Multi-Durchschlagverhalten angesehen wird, siehe Abbildung 3.16 grüner Bereich Anhang A

Kurve 2 bis 4. Die auftretenden qualitativen Druck-Verschiebungs-Verläufe, welche bei den Untersuchungen ermittelt wurden, sind im Anhang A dargestellt.

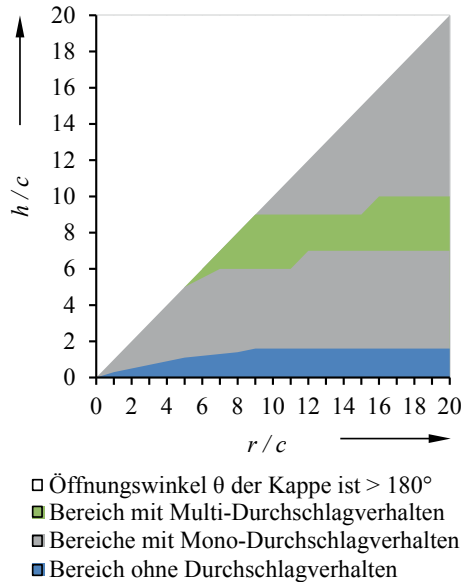


Abbildung 3.16: Darstellung der Bereiche, in denen verschiedene Durchschlagcharakteristiken auftreten

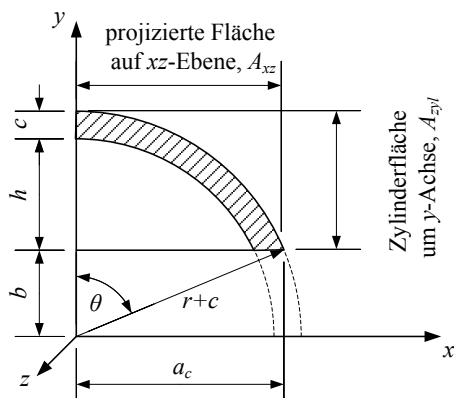
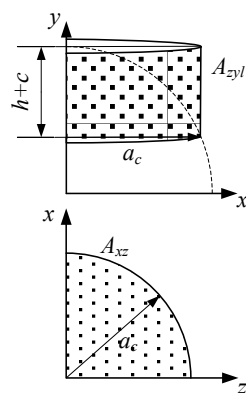
Ergänzend wird in Abbildung 3.16 auch der Bereich dargestellt, welcher für Strukturen mit einem Öffnungswinkel θ größer als 180° gilt, wobei diese Geometrievarianten nicht näher beleuchtet werden (weißer Bereich). Die Grenze des stabilen Verhaltens kann bereichsweise durch empirisch ermittelte Gleichungen für den Zusammenhang von Grundradius r zur Höhe h der sphärischen Strukturen beschrieben werden, siehe Tabelle 3.1. Die Gleichungen zeigen, dass die Grenze des stabilen Verhaltens dicker sphärischer Strukturen in Form eines Polynoms 2. Grades vom Verhältnis r/c abhängt und diese Abhängigkeit mit steigendem Wert für r/c in eine Konstante von $h/c = 1,6$ übergeht.

Im Tabelle A.1 sind die charakteristischen Druck-Verschiebungs-Verläufe in einer Übersicht dargestellt und in Tabelle A.2 die signifikanten Werte für h/c und r/c aufgelistet, bei denen die verschiedenen Verlaufs-Charakteristiken auftreten.

Tabelle 3.1: Grenze des stabilen Verhaltens von sphärischen Strukturen

Strukturform	Grenze der Durchschlagfähigkeit in Abhängigkeit von r/c
Dicke Strukturen	$3 \leq \frac{r}{c} \leq 9 \rightarrow \frac{h}{c} = -0,0105 \left(\frac{r}{c} \right)^2 + 0,2655 \frac{r}{c}$ (3.1)
Dünne Strukturen, Übergang zur Schale	$\frac{r}{c} > 9 \rightarrow \frac{h}{c} = 1,6$ (3.2)

Der Bereich in dem Durchschlagen mit mehr als einem Durchschlagpunkt auftritt, weist sphärische Strukturen mit geringer Nachgiebigkeit auf. In der Literatur wird dies mithilfe eines Vergleiches erklärt. In dem Vergleich werden die auftretenden Beulformen einer fest eingespannten sphärischen Struktur mit denen einer sphärischen Struktur gegenübergestellt, welche in Richtung des Sphärenradius verschiebbar gelagert ist (siehe dazu Budiansky 1959 und Budiansky 1962). Da diese Erklärung auf der Mittelfläche einer idealen Schale beruht und bei den durchgeführten Berechnungen nur teilweise zutrifft, kann das Phänomen der steigenden Steifigkeit durch einen anderen Zusammenhang begründet werden.

**Abbildung 3.17:** Darstellung des Sachverhaltes zur Ermittlung der Zylinder- und projizierten Kreisfläche**Abbildung 3.18:** Darstellung der Zylinder- und projizierten Kreisfläche sowie die benötigten Größen

Bei den sphärischen Strukturen mit Multi-Durchschlagverhalten weisen die auf die xz -Ebene projizierte Kreisfläche A_{xz} , siehe Abbildung 3.18 unten, und eine Zylinderfläche

A_{zyl} mit der Höhe h die um die y -Achse rotiert, siehe Abbildung 3.18 oben, ein bestimmtes Verhältnis V_{HV} zueinander auf. Die Kreisfläche A_{xz} ist zudem vom Radius a_c abhängig.

Der Radius a_c bildet sich aus dem Grundradius r , der Wandstärke c und dem Öffnungswinkel θ . Die Zylinderfläche A_{zyl} ergibt sich aus der Höhe h , der Wandstärke c und aus dem Radius a_c . Das Verhältnis V_{HV} ist der Quotient aus der Zylinderfläche A_{zyl} und der Kreisfläche A_{xz} , siehe Gleichung (3.3). Die Kreisfläche repräsentiert die vertikale Druckkomponente und die Zylinderfläche die horizontale Druckkomponente. In Abbildung 3.17 und Abbildung 3.18 sind die Flächen mit den benötigten Größen zur Berechnung skizziert.

$$V_{HV} = \frac{A_{zyl}}{A_{xz}} = \frac{2\pi a_c h_a}{2\pi a_c^2} = \frac{2\pi \sin(\theta) r_a h_a}{2\pi (\sin(\theta) r_a)^2} = \frac{2}{\sqrt{2 \frac{r_a}{h_a} - 1}} = \frac{2}{\sqrt{2 \frac{r+c}{h+c} - 1}} \quad (3.3)$$

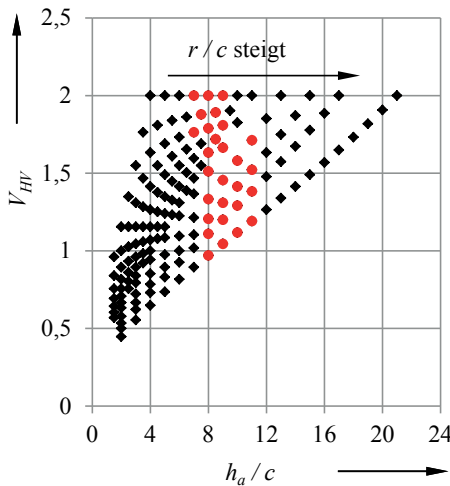


Abbildung 3.19: Darstellung des Bereiches für $V_{HV}(h_a/c)$, in dem Multi-Durchschlagverhalten auftritt mit roten Punkten

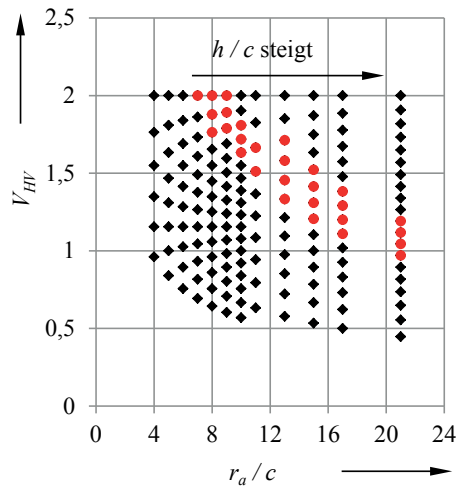


Abbildung 3.20: Darstellung des Bereiches für $V_{HV}(r_a/c)$, in dem Multi-Durchschlagverhalten auftritt mit roten Punkten

Das Verhältnis der beiden Flächen zueinander wird, gemäß Gleichung (3.3) vom Grundradius r und von der Höhe h beeinflusst. Der Quotient V_{HV} steigt an, wenn r/h verringert wird. In Abbildung 3.19 und Abbildung 3.20 ist der Bereich für V_{HV} in Abhängigkeit von h_a/c bzw. r_a/c , in dem Multi-Durchschlagverhalten auftritt, durch rote Punkte markiert.

Mithilfe der Darstellung in Abbildung 3.19 und Abbildung 3.20 ist erkennbar, welche geometrischen Kennwerte eine sphärische Struktur aufweisen muss, um eine möglichst geringe Nachgiebigkeit und folglich hohen Durchschlagdruck zu realisieren.

Tabelle 3.2: Einteilung der Bereiche für r_a/c und h_a/c , in denen V_{HV} zu Multi-Durchschlagverhalten führt

Bereich h_a/c	Bereich r_a/c
$7 \leq \frac{h_a}{c} \leq 9$ wenn $\frac{r_a}{c} \leq 9$ $8 \leq \frac{h_a}{c} \leq 11$ wenn $\frac{r_a}{c} \geq 10$	$7 \leq \frac{r_a}{c} \leq 21$

3.2.3 Verschiebung des Scheitelpunktes bei anliegender kritischer Last in Abhängigkeit von den geometrischen Abmessungen der untersuchten sphärischen Strukturen

Um das Verformungsverhalten der sphärischen Strukturen unter Druckbelastung zu untersuchen, werden die Verschiebungen u_k des Scheitelpunktes P_S näher betrachtet (siehe Abbildung 3.21) und mit den geometrischen Verhältnissen r/c und h/c in Zusammenhang gebracht. Dazu wird die Verschiebung u_k bis zum Erreichen einer kritischen Last p_k ermittelt. Es ergeben sich die folgenden Verläufe (Abbildung 3.22 bis Abbildung 3.24). Zur Darstellung der Kurven wurden diese auf drei Diagramme verteilt.

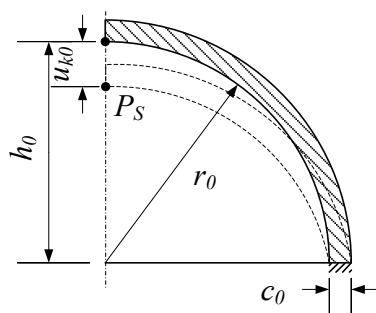


Abbildung 3.21: Schematische Darstellung der sphärischen Referenzstruktur und der Verschiebung u_{k0} des Scheitelpunktes P_S bei anliegender kritischer Last p_{k0}

Die Verschiebungen u_k/u_{k0} des Scheitelpunktes P_S bis zum Erreichen der kritischen Last p_k nehmen bei allen sphärischen Strukturen mit Erhöhung von h/c stark ab, wobei die Kurven für Strukturen mit $r/c = 6, \dots, 10, 12, 14, 16, 20$ ein lokales Minimum

aufweisen. Weiterhin existiert bei sehr dünnen und hohen sphärischen Strukturen ($r/c = 16$ und 20) ein lokales Maximum im weiteren Verlauf von h/c .

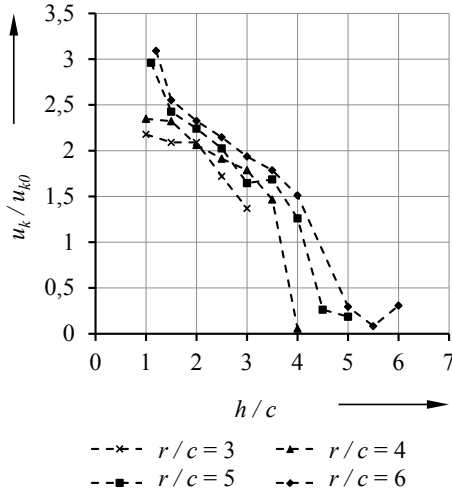


Abbildung 3.22: Verlauf der kritischen Verschiebung u_k / u_{k0} in Abhängigkeit vom geometrischen Verhältnis h/c bei $r/c = 3, \dots, 6$

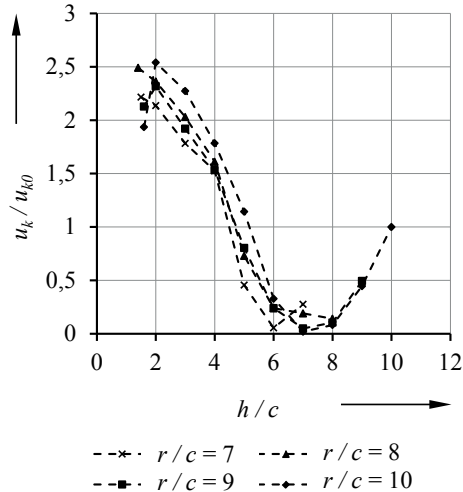


Abbildung 3.23: Verlauf der kritischen Verschiebung u_k / u_{k0} in Abhängigkeit vom geometrischen Verhältnis h/c bei $r/c = 7, \dots, 10$

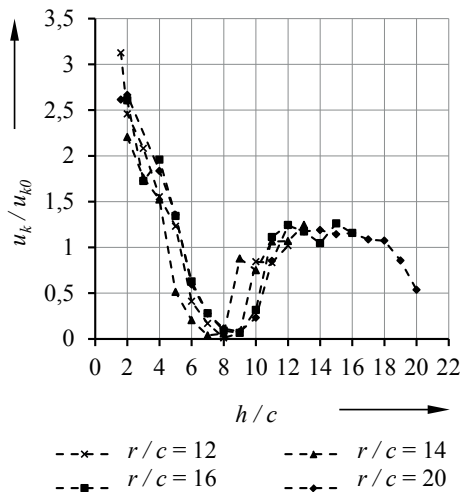


Abbildung 3.24: Verlauf der kritischen Verschiebung u_k / u_{k0} in Abhängigkeit vom geometrischen Verhältnis h/c mit $r/c = 12, 14, 16, 20$

Die Minima der Kurven aus Abbildung 3.22 bis Abbildung 3.24 bilden sphärische Strukturen ab, deren geometrische Verhältnisse zu einer geringen Nachgiebigkeit führen.

Dadurch kommt es zu geringeren Verschiebungen u_k / u_{k0} des Scheitelpunktes bevor ein Durchschlagen eintritt. Im umliegenden Bereich des Minimums ($5,5 \leq h/c \leq 10$) befinden sich die sphärischen Strukturen mit Multi-Durchschlagcharakteristik. Das bedeutet, diese über eine höhere Steifigkeit verfügen, wodurch maximale kritische Lasten p_k / p_{k0} und minimale Verschiebungen u_k / u_{k0} erreicht werden können. Des Weiteren wird die Verschiebung u_k / u_{k0} nur gering vom Verhältnis r/c beeinflusst, dem gegenüber wird u_k / u_{k0} primär vom Verhältnis h/c gesteuert. Dieser Sachverhalt ist auch bei einem Zwei-Balken-Tragwerk (Abbildung 3.25), wie er in Abschnitt 2.2 analysiert wird, erkennbar. In der Gleichung (2.5) aus Abschnitt 2.2 wird $h = 2$ festgelegt, l wird von 3 bis 20 variiert, was der Änderung des Grundradius der untersuchten sphärischen Strukturen ähnlich ist. Die Querschnittsfläche der Balken A wird zu eins gewählt, der E-Modul auf 2,7 MPa gesetzt und F wird so weit erhöht bis instabiles Verhalten auftritt. Bei dieser Kraft wird u_k ermittelt und in Abhängigkeit von a_b aufgetragen. Unter der Berücksichtigung der beschriebenen Annahmen ergibt sich der Verschiebung-Abstands-Verlauf ($u_k(a_b)$ -Verlauf) wie er in Abbildung 3.26 dargestellt ist.

Das Diagramm in Abbildung 3.26 zeigt, dass die Verschiebung bis zum Erreichen der kritischen Kraft bei kleinen Abständen zwischen den Lagern noch stark vom Abstand a_b beeinflusst wird. Der Einfluss wird mit Vergrößerung von a_b schwächer und der Anstieg der Kurve dementsprechend niedriger. Ein ähnliches Verhalten zeigt sich auch bei den berechneten sphärischen Strukturen. Die Verschiebung u_k streut bei kleinen Radien noch stark (Abbildung 3.22). Diese Streuung nimmt jedoch mit Erhöhung von r ab und zeigt ein Verhalten, welches nur sehr gering von r beeinflusst wird (Abbildung 3.24). In Abbildung 3.27 ist $u_k / u_{k0} (r/c)$ dargestellt. Der Verlauf der Kurve in Abbildung 3.27 zeigt, dass der Anstieg der Kurve mit steigendem r/c abnimmt und u_k / u_{k0} bei dünnen sphärischen Strukturen folglich weniger von r/c beeinflusst wird.

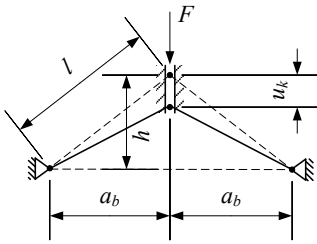


Abbildung 3.25: Zwei-Balken-Tragwerk

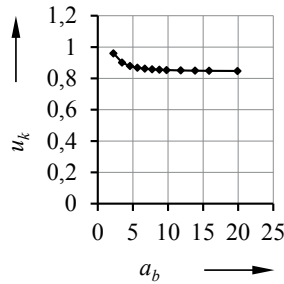


Abbildung 3.26: Verlauf der kritischen Verschiebung u_k in Abhängigkeit vom Abstand der Lager a_b bei $h = 2$

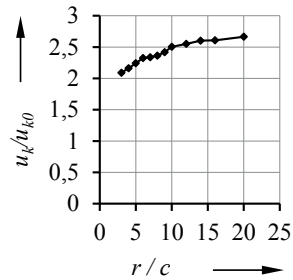


Abbildung 3.27: Verlauf der kritischen Verschiebung u_k / u_{k0} in Abhängigkeit von r / c bei $h / c = 2$

3.2.4 Untersuchung des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens

Nach Analyse des Verformungsverhaltens von druckbelasteten sphärischen Strukturen werden in diesem Abschnitt die Spannungs-Dehnungs-Zusammenhänge näher betrachtet. Das Ziel ist die Ermittlung des Verhaltens der Festigkeit unter den bereits definierten Bedingungen.

Zur Auswertung der Berechnungsergebnisse werden die Vergleichsspannungen nach von Mises verwendet. Von Mises geht davon aus, dass ein Bauteil versagt, wenn die Gestaltänderungsenergie einen Grenzwert überschreitet. Dazu wird der elastische Anteil der Energie mit dem entsprechenden Anteil in einer einachsigen Zugprobe verglichen.

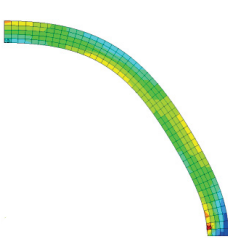


Abbildung 3.28: Darstellung der von Mises-Spannungen an der sphärischen Referenzstruktur bei anliegender kritischer Last

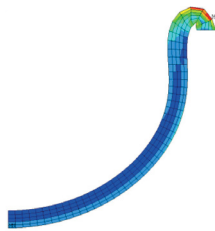


Abbildung 3.29: Darstellung der von Mises-Spannungen an der sphärischen Referenzstruktur nach dem Durchschlag



Abbildung 3.30: Beträge der Verschiebungsvektoren an der sphärischen Referenzstruktur bei anliegender kritischer Last

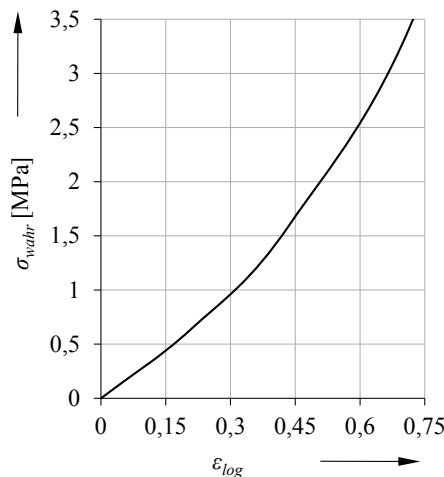


Abbildung 3.31: Spannungs-Dehnungs-Kurve eines Zugversuches mit dem Material ELASTO-SIL R420/50C1 [Risto 2006]

In Abbildung 3.28 und Abbildung 3.29 sind die von Mises-Spannungen vor und nach dem Durchschlag an der sphärischen Referenzstruktur, und in Abbildung 3.30 ist die Verteilung der summierten Verschiebungen im Durchschlagpunkt dargestellt.

Zu Beginn des 3. Kapitels wurde die Durchführung eines uniaxialen Zugversuches (Abbildung 3.31) zur Bestimmung der nötigen Materialparameter erläutert (Parameterbestimmung siehe Anhang B). Auf Grundlage dieser Daten werden die folgenden Untersuchungen durchgeführt. Weiterhin wird für dieses Material, vgl. Abbildung 3.31, ein Bereich approximiert, in dem ein quasi-linearer Verlauf im Spannungs-Dehnungs-Verlauf auftritt ($0 \leq \sigma_{wahr} \leq 1$ MPa).

In den weiteren Betrachtungen werden die auftretenden maximalen Spannungen und Dehnungen an den sphärischen Strukturen betrachtet. Die Werte werden speziell bei anliegender kritischer Last und nach dem Durchschlag ermittelt. Das Ziel ist die Ermittlung des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens der verformten sphärischen Strukturen.

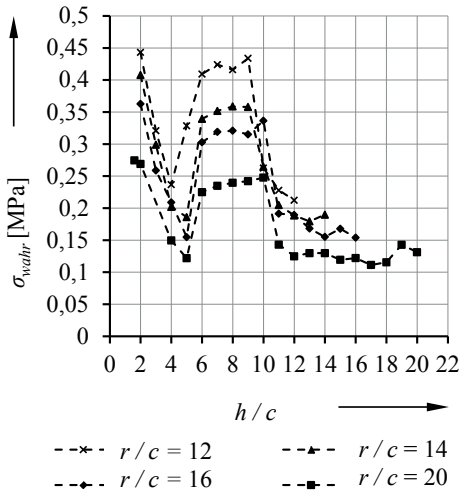


Abbildung 3.32: Verlauf der maximalen von Mises-Spannungen bei anliegender kritischer Last in Abhängigkeit von h/c für $r/c = 12, 14, 16, 20$

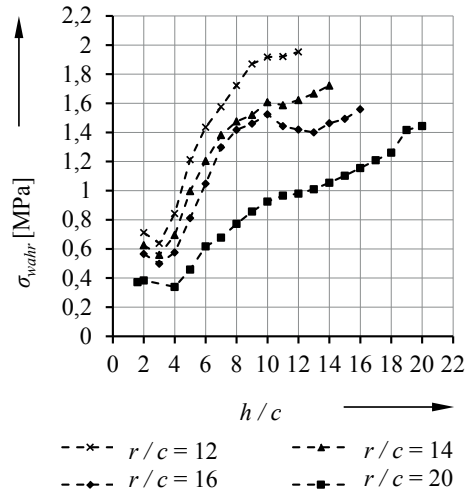


Abbildung 3.33: Verlauf der maximalen von Mises-Spannungen nach dem Durchschlag in Abhängigkeit von h/c für $r/c = 12, 14, 16, 20$

In Abbildung 3.32 sind die Verläufe der maximalen von Mises-Spannungen σ_{wahr} bei anliegender kritischer Last für $r/c = 12, \dots, 20$ in Abhängigkeit von h/c aufgetragen. Die Kurven zeigen ein qualitativ ähnliches Verhalten und unterscheiden sich in erster Linie durch die Höhe der auftretenden Spannungen. Daher wird an dieser Stelle auf die Darstellung der kleineren Werte von r/c verzichtet. Ein vergleichbares Verhalten konnte bereits in Abschnitt 3.2.1 und 3.2.3 festgestellt werden.

Der Spannungsverlauf aus Abbildung 3.32 ähnelt sehr stark dem Verlauf der kritischen Last p_k/p_{k0} in Abhängigkeit von h/c , siehe Abbildung 3.11. Dies zeigt, dass sich die Steifigkeit in Abhängigkeit vom Verhältnis h/c der sphärischen Struktur in einem eingeschränkten Bereich signifikant erhöht und demzufolge zur Erhöhung des Durchschlagdruckes p_k führt. Weiterhin sind die maximalen Spannungen nach dem Durchschlag in Abbildung 3.33 dargestellt. Die Kurven weisen qualitativ einen anderen Verlauf der von Mises-Spannungen σ_{wahr} in Abhängigkeit vom Verhältnis h/c der sphärischen Strukturen als in Abbildung 3.32 auf. Flache und dünne sphärische Strukturen verfügen über ein Spannungsverhalten im quasi-linearen Bereich des experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Verlaufes. Die Zunahme von h/c und die Reduzierung von r/c führen dazu, dass die Spannungen im nachkritischen Bereich (nach dem Durchschlag) weiter ansteigen

und sich nicht mehr im approximierten linearen Bereich des Spannungs-Dehnungs-Verlaufes befinden.

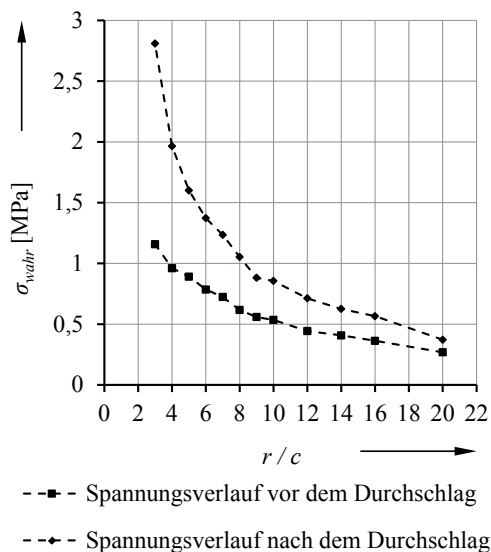
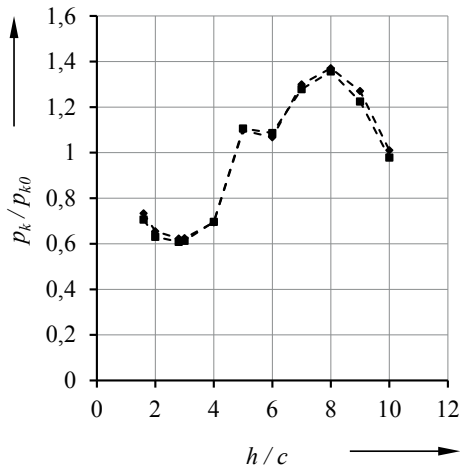


Abbildung 3.34: Verlauf der maximalen von Mises-Spannungen im Durchschlagpunkt und nach dem Durchschlag in Abhängigkeit von r/c bei $h/c = 2$

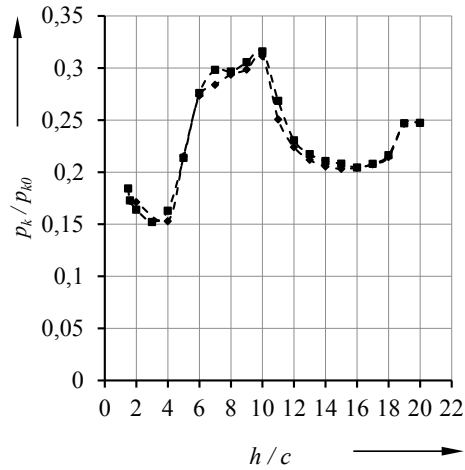
Abbildung 3.34 zeigt die maximalen von Mises-Spannungen in Abhängigkeit von r/c bei konstantem Wert für h/c vor und nach dem Durchschlag. Das Diagramm zeigt, dass sich die Steifigkeit mit Zunahme von r/c verringert und die Festigkeit sich im quasi-linearen Bereich des Spannungs-Dehnungs-Diagrammes befindet. Es ist weiterhin erkennbar, dass die Spannungen nach dem Durchschlag größer sind als davor und dass sie zum Teil im nichtlinearen Bereich des Spannungs-Dehnungs-Verlaufes aus Abbildung 3.31 liegen.

Für dünnwandige und flache sphärische Strukturen ($r/c \geq 10$, $h/c \leq 6$) ergibt die Auswertung, dass näherungsweise ein lineares Materialmodell herangezogen und eine Vereinfachung der Berechnungen vorgenommen werden kann. Die Approximation des Materialmodells führt zu einem linear elastischen Material mit einem E-Modul von ca. 2,7 MPa und einer Querkontraktionszahl $\mu = 0,49$. Zur weiteren Überprüfung der Näherung werden die neu ermittelten Materialdaten in das vorhandene FEM-Modell übernommen und die Durchschlaglasten exemplarisch für sphärische Strukturen mit $h/c = 10$ und 20 berechnet. Bei sphärischen Strukturen mit diesen Verhältnissen treten nichtlineare und quasi-lineare Spannungs-Dehnungs-Zusammenhänge im nachkritischen Bereich auf.



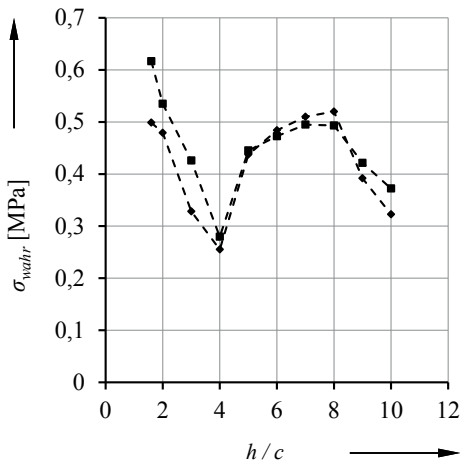
--■-- Hooke $E = 2,7 \text{ MPa}$ --◆-- Mooney-Rivlin

Abbildung 3.35: Verläufe der kritischen Lasten bei $r/c = 10$ und in Abhängigkeit von h/c mit linearem Materialmodell (Hooke, $E = 2,7 \text{ MPa}$) und mit nichtlinearem Materialmodell (Mooney-Rivlin)



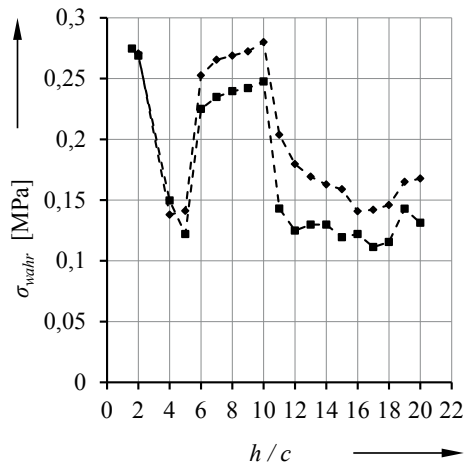
--■-- Hooke $E = 2,7 \text{ MPa}$ --◆-- Mooney-Rivlin

Abbildung 3.36: Verläufe der kritischen Lasten bei $r/c = 20$ und in Abhängigkeit von h/c mit linearem Materialmodell (Hooke, $E = 2,7 \text{ MPa}$) und mit nichtlinearem Materialmodell (Mooney-Rivlin)



--■-- Hooke $E = 2,7 \text{ MPa}$ --◆-- Mooney-Rivlin

Abbildung 3.37: Vergleich der auftretenden maximalen von Mises-Spannungen im Durchschlagpunkt bei der Berechnung mit unterschiedlichen Materialmodellen für Strukturen mit $r/c = 10$



--■-- Hooke $E = 2,7 \text{ MPa}$ --◆-- Mooney-Rivlin

Abbildung 3.38: Vergleich der auftretenden maximalen von Mises-Spannungen im Durchschlagpunkt bei der Berechnung mit unterschiedlichen Materialmodellen für Strukturen mit $r/c = 20$

Die Kurven in Abbildung 3.35 weisen eine sehr gute Übereinstimmung im Vergleich untereinander auf. Die kritischen Lasten stimmen, unter Nutzung des angenäherten E-Moduls, mit denen aus den Berechnungen mit nichtlinear elastischem Materialmodell sehr gut überein, das gleiche gilt für Abbildung 3.36. Die Einschränkung für die Nutzung des angenäherten E-Moduls auf flache sphärische Strukturen ($h/c \leq 6$) kann für die Beispielreihen $r/c = 10$ und 20 aufgehoben werden, da sich die Ergebnisse auch für hohe sphärische Strukturen sehr gut decken.

Es zeigt sich, dass die Vereinfachung der Materialeigenschaften auf ein lineares Modell im vorliegenden Beispiel nur einen sehr geringen bis vernachlässigbaren Einfluss auf die kritische Last p_k / p_{k0} hat. Dem gegenüber sind die auftretenden Spannungen in dünnwandigen sphärischen Strukturen ($r/c = 20$, Abbildung 3.38) mit linearem Materialmodell höher als in selbigen mit nichtlinearem Materialmodell. Der Unterschied der Spannungen in sphärischen Strukturen mit $r/c = 10$ ist wiederum vernachlässigbar, siehe Abbildung 3.37.

3.3 Vergleich des Verformungs-Dehnungs-Verhaltens von sphärischen Strukturen bei anliegender kritischer Last unter der Nutzung von zwei Modellierungsmethoden

In Kapitel 1 und 2 wurden die Grundlagen für die Berechnung des statisch-mechanischen Verhaltens von Rotationsschalen dargestellt und es wurde erläutert, aus welchen Gründen die Methode der FEM in der vorliegenden Arbeit angewendet wird. Die im Abschnitt 3.2 dargestellten Ergebnisse lassen die Annahme zu, dass die Nutzung eines linearen Materialmodells nach HOOKE für die Berechnung des Verformungsverhaltens möglich ist. Zudem können die Verformungen bis zum Erreichen der kritischen Last als klein eingestuft werden, siehe Abschnitt 3.2.3 und Abschnitt 3.2.4.

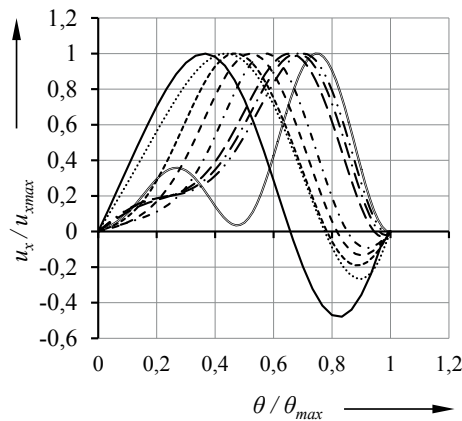
Um den Einfluss der verwendeten Modellierungsmethode auf das Ergebnis des Verformungs-Dehnungs-Verhaltens zu bestimmen, wird in diesem Abschnitt die lineare Schalentheorie, so wie sie in Kapitel 2.3 erläutert wird, zur Berechnung der Verformungen und Dehnungen von sphärischen Strukturen bei anliegender kritischer Last eingesetzt. Die 1. Modellierungsmethode stellt somit das FEM-Plane-Modell dar, und die 2. Modellie-

runismethode die lineare Schalentheorie. Anschließend werden die ermittelten Ergebnisse miteinander verglichen.

Mithilfe der in Kapitel 2 erläuterten Theorie werden die Verformungen und Dehnungen bei aufgebrachter kritischer Last berechnet, wobei die kritische Last auf den FEM-Ergebnissen beruht. Bei der Berechnung des Verformungs-Dehnungs-Verhaltens mithilfe der linearen Schalentheorie, werden die Verschiebungen in x -Richtung u_x und die Dehnungen in Richtung des Breitenkreiswinkels ε_φ ermittelt.

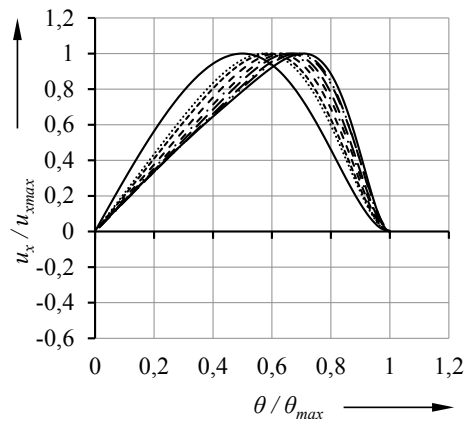
Aufgrund der rotationssymmetrischen Eigenschaften werden die Verschiebungen u_x und Dehnungen ε_φ der Ringfasern ausgewertet. Die Ringfasern verlaufen in der Breitenkreisebene. Die Lage beziehungsweise die Position der Ringfaser wird über den normierten Öffnungswinkel abgebildet. Der normierte Öffnungswinkel ist das Verhältnis des tatsächlichen Öffnungswinkels θ , bei dem die betrachtete Ringfaser liegt, zum maximalen Öffnungswinkel θ_{max} der betrachteten sphärischen Struktur, siehe Abbildung 3.41.

In Abbildung 3.39 sind die normierten Verschiebungen u_x / u_{xmax} der Ringfaser in Abhängigkeit vom normierten Öffnungswinkel der sphärischen Strukturen θ / θ_{max} für verschiedene Verhältnisse von h / c und mit $r / c = 20$ dargestellt, wobei diese auf den FEM-Berechnungen basieren. Zum Vergleich sind in Abbildung 3.40 die normierten Verschiebungen $u_x / u_{xmax}(\theta / \theta_{max})$ aus den analytischen Berechnungen abgebildet. Die Ringfasern der mit FEM berechneten sphärischen Strukturen weisen im Bereich der Einspannung bei $\theta / \theta_{max} = 0,9, \dots, 1$ negative normierte Verschiebungen u_x / u_{xmax} auf. Im Gegensatz dazu sind die mithilfe der linearen Schalentheorie ermittelten Verschiebungen u_x / u_{xmax} ausschließlich positiv. Die Ergebnisse der FEM-Berechnungen zeigen weiter, dass die negative Verschiebung u_x / u_{xmax} mit Anstieg des Verhältnisses h / c der sphärischen Strukturen abnimmt.



— $h/c = 2$ $h/c = 4$ --- $h/c = 6$
 - - $h/c = 8$ - · - $h/c = 10$ — $h/c = 12$
 - · - $h/c = 14$ - · - $h/c = 16$ — $h/c = 20$

Abbildung 3.39: Normierte Verschiebung der Ringfaser in x -Richtung aus FEM-Berechnungen in Abhängigkeit vom normierten Öffnungswinkel der sphärischen Strukturen für verschiedene Werte von h/c



— $h/c = 2$ $h/c = 4$ --- $h/c = 6$
 - - $h/c = 8$ - · - $h/c = 10$ — $h/c = 12$
 - · - $h/c = 14$ - · - $h/c = 16$ — $h/c = 20$

Abbildung 3.40: Normierte Verschiebung der Ringfaser in x -Richtung aus analytischen Berechnungen in Abhängigkeit vom normierten Öffnungswinkel der sphärischen Strukturen für verschiedene Werte von h/c

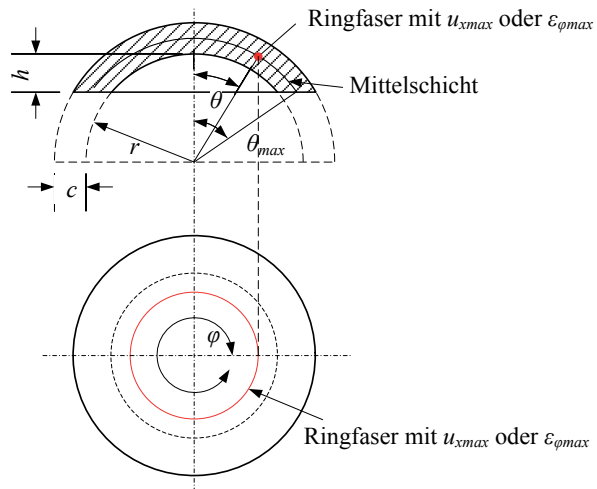


Abbildung 3.41: Schematische Darstellung der Position der Ringfaser mit der Verschiebung u_{xmax} oder Dehnungen $\epsilon_{\phi max}$ bzgl. des Öffnungswinkels θ

Beide Modellierungsmethoden zeigen Zusammenhänge zwischen der Verschiebung u_x und h/c auf, bei denen u_{xmax} sich mit Erhöhung von h/c in Richtung eines höheren normierten Winkels θ/θ_{max} verschiebt.

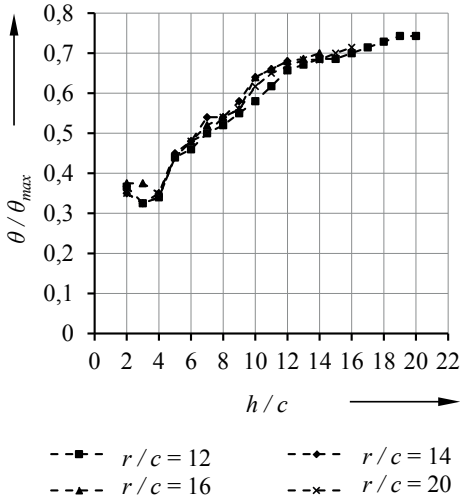


Abbildung 3.42: Verlauf des normierten Öffnungswinkels bzw. der normierten Lage der Ringfaser mit der maximalen Verschiebung u_{xmax} in Abhängigkeit von h/c aus FEM-Berechnungen mit $r/c = 12, 14, 16, 20$

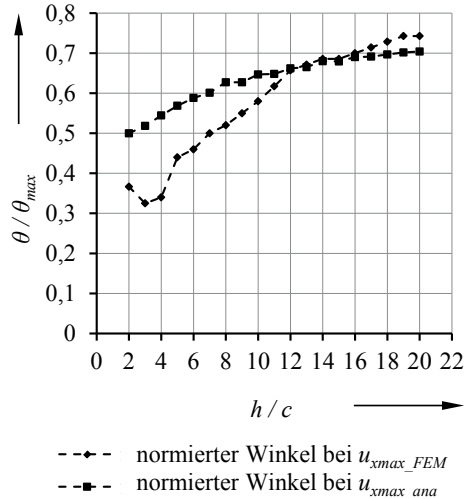


Abbildung 3.43: Gegenüberstellung der Verläufe der normierten Winkel bzw. der normierten Lage der Ringfaser mit der maximalen Verschiebung u_{xmax} in Abhängigkeit von h/c und mit $r/c = 20$ für die angewendeten Berechnungsmethoden

In Abbildung 3.42 ist der Verlauf des normierten Winkels θ/θ_{max} , bei dem die maximale Verschiebung u_{xmax} in der Ringfaser auftritt, in Abhängigkeit von h/c und für verschiedene Werte von r/c abgebildet.

Mithilfe der Abbildung 3.42 ist erkennbar, dass der normierte Öffnungswinkel θ/θ_{max} , bei dem u_{xmax} liegt, nur geringfügig vom Verhältnis r/c der sphärischen Strukturen beeinflusst wird. Die Kurven in Abbildung 3.42 liegen nahe beieinander. Das bedeutet weiterhin, dass, unabhängig von der Modellierungsmethode, die lokalen Maxima des Zusammenhanges zwischen u_x/u_{xmax} und θ/θ_{max} aus Abbildung 3.39 und Abbildung 3.40 in erster Linie von h/c bestimmt werden.

Zum Vergleich der Modellierungsmethoden ist in Abbildung 3.43 der mithilfe der 2. Methode berechnete Verlauf des normierten Öffnungswinkels $\theta/\theta_{max}(h/c)$, bei dem die

Ringfaser mit der maximalen x -Verschiebung auftritt, dargestellt. Für flache sphärische Strukturen ($h/c = 2, \dots, 5$) zeigen die Kurven ein gegensinniges Verhalten.

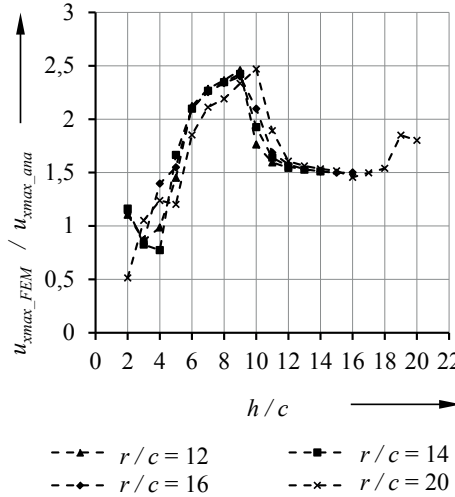


Abbildung 3.44: Verhältnis von $u_{xmax_FEM} / u_{xmax_ana}$ in Abhängigkeit von h/c für verschiedene Werte von r/c mit $r/c = 12, 14, 16, 20$

Der Graph des normierten Winkels $\theta / \theta_{max}(h/c)$ für u_{xmax_FEM} zeigt zu Beginn des genannten Bereiches einen negativen Anstieg. Hingegen weist der Graph für u_{xmax_ana} einen positiven Anstieg auf. Weiterhin ist ersichtlich, dass die FEM-Berechnungen zu Ergebnissen führen, bei denen die maximalen Verschiebungen u_{xmax} an flachen sphärischen Strukturen ($h/c = 2, \dots, 5$) bei kleineren normierten Winkeln θ / θ_{max} liegen, als es bei Berechnungen mit der vereinfachten Schalentheorie der Fall ist. Dieser Unterschied nimmt mit Zunahme von h/c wieder ab und die Kurve u_{xmax_FEM} nimmt qualitativ den gleichen Verlauf wie die analytisch ermittelte Kurve u_{xmax_ana} an. Der Graph von u_{xmax_FEM} verläuft jedoch mit höherem Anstieg. Dies führt dazu, dass die Differenz der normierten Winkel zwischen beiden Kurven im Bereich $12 \leq h/c \leq 16$ nahezu Null ist.

Das Verhältnis der Verschiebungen aus FEM-Berechnungen und analytischer Berechnungsweise ist in Abbildung 3.44 dargestellt. Dazu werden u_{xmax_FEM} und u_{xmax_ana} zueinander ins Verhältnis gesetzt und für verschiedene Werte von r/c in Abhängigkeit von h/c dargestellt.

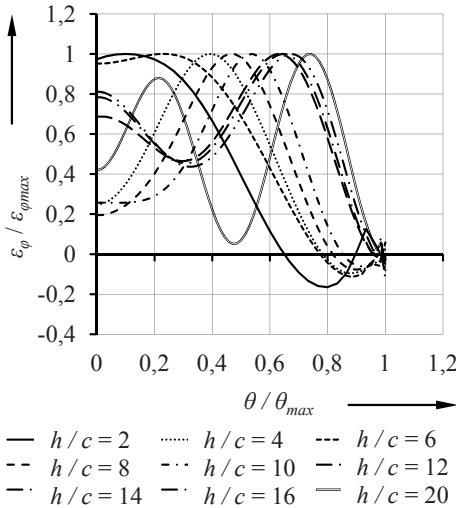


Abbildung 3.45: Normierte Dehnung $\varepsilon_\phi / \varepsilon_{\phi\max}$ der Ringfaser aus FEM-Berechnungen in Abhängigkeit vom normierten Öffnungswinkel θ / θ_{\max} der sphärischen Strukturen für verschiedene h / c - Verhältnisse mit $r / c = 20$

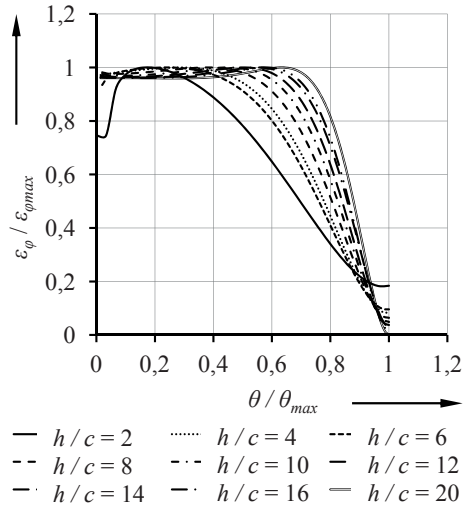


Abbildung 3.46: Normierte Dehnung $\varepsilon_\phi / \varepsilon_{\phi\max}$ der Ringfaser aus analytischen Berechnungen in Abhängigkeit vom normierten Öffnungswinkel θ / θ_{\max} der sphärischen Strukturen für verschiedene h / c - Verhältnisse mit $r / c = 20$

Abbildung 3.44 zeigt, dass die FEM-Berechnungen über einen weiten Bereich von h / c ($h / c > 4$) zu größeren Verschiebungen führen als die analytisch ermittelten Verschiebungen. Im Bereich flacher sphärischer Strukturen ($h / c < 4$) liegen bei den FEM-Berechnungen wiederum kleinere Verschiebungen vor ($u_{x\max_FEM} / u_{x\max_ana} \leq 1$) als bei den analytischen Ergebnissen. Des Weiteren stellt sich ein nahezu konstantes Verhältnis von ca. 1,5 im Bereich $h / c = 12, \dots, 18$ ein. In diesem Bereich ist der Unterschied zwischen den Berechnungsmethoden auf einem gleichbleibenden Niveau ($u_{x\max_FEM} = 1.5 u_{x\max_ana}$).

Die Betrachtungen zu den Dehnungen ε_ϕ der Ringfaser, die mit der 1. Methode (Abbildung 3.45) und mit der 2. Methode (Abbildung 3.46) ermittelt wurden, zeigen die folgenden Verläufe. Die FEM-Ergebnisse weisen Bereiche mit sowohl positiven als auch negativen Dehnungen (Zug und Druck) auf, wobei die negativen Dehnungen im Bereich der Einspannung auftreten. Die analytisch berechneten Kurven zeigen im Gegensatz keine negativen Dehnungen, und das Verhältnis h / c der sphärischen Strukturen hat einen geringen Einfluss auf die Dehnungen im Scheitelbereich (mit Ausnahme von $h / c = 2$). Der

Vergleich lässt darauf schließen, dass die Vereinfachungen bzw. Annahmen bei der analytischen Methode zu ungenaueren Ergebnissen führen.

Tabelle 3.3: Übersicht zu den unterschiedlichen Kurventypen in Zusammenhang mit h/c

h/c	2, 6	4, 8	10, 12, 14, 16	20
Kurventyp	1 negative Dehnung nahe der Einspannung, lokales Minimum und Maximum	2 negative Dehnung nahe der Einspannung, zwei lokale Minima und ein lokales Maximum	3 positive Dehnung nahe der Einspannung, lokales Minimum und zwei lokale Maxima	4 positive Dehnung nahe der Einspannung, zwei lokale Minima und zwei lokale Maxima

Die FEM-Ergebnisse zeigen, dass die Dehnungen ε_φ in Abhängigkeit von h/c unterschiedliche Funktionsverläufe aufweisen, siehe Tabelle 3.3 und dazu Abbildung 3.45. Der Vergleich der Ergebnisse aus den Berechnungen mit zwei verschiedenen - FEM und lineare Schalentheorie - zeigt weiterhin, dass sich die Maxima der Kurven von beiden Modellierungsmethoden mit Steigerung von h/c in Richtung eines größeren normierten Winkels θ/θ_{max} verschieben. In Abbildung 3.47 sind die normierten Öffnungswinkel θ/θ_{max} für die Position der Ringfaser mit der maximal auftretenden Dehnung ε_φ in Abhängigkeit von h/c aufgetragen. Auch hier zeigt sich, dass die Lage der Ringfaser mit der maximalen Dehnung ε_φ in erster Linie von der Höhe h und der Wandstärke c der untersuchten sphärischen Strukturen beeinflusst wird.

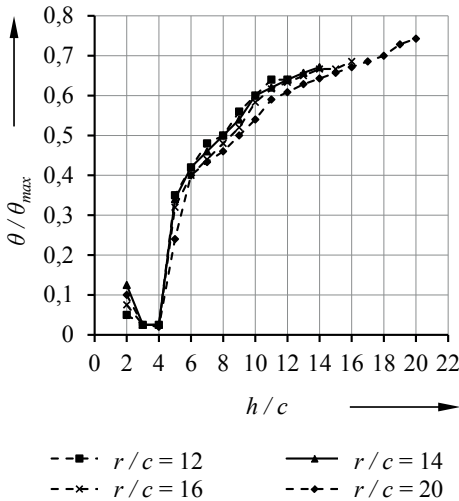


Abbildung 3.47: Verlauf der normierten Position der Ringfaser mit der maximalen Dehnung in Abhängigkeit von h/c aus FEM-Berechnungen mit $r/c = 12, 14, 16, 20$

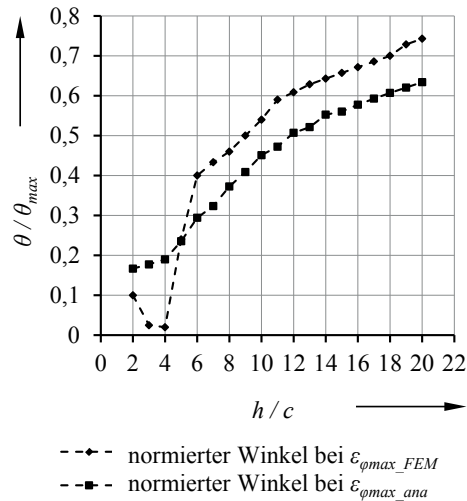


Abbildung 3.48: Gegenüberstellung der Verläufe der normierten Position der Ringfaser mit der maximalen Dehnung in Abhängigkeit von h/c für die angewendeten Berechnungsmethoden

Zum Vergleich der Methoden sind die Verläufe der relativen Position der Ringfaser mit der maximalen Dehnung ε_{ϕ} in Abbildung 3.48 gegenübergestellt. Die Kurven weisen im Bereich für flache sphärische Strukturen mit $h/c \leq 5$ einen signifikanten Unterschied zueinander auf. Hier verlaufen die FEM-Ergebnisse zu Beginn der Kurve monoton fallend bis zu einem lokalen Minimum bei ca. $\theta / \theta_{max} = 0,02$. Der Wert für θ / θ_{max} in dem Minimum bedeutet, dass die maximalen Dehnungen annähernd im Scheitelpunkt auftreten. Mit weiterer Erhöhung von h/c und Überschreitung des Minimums erfolgt ein monoton wachsender Anstieg des Graphen. Ab einem Wert von $h/c = 6$ zeigen die Kurven einen qualitativ ähnlichen Verlauf.

Das Verhältnis von FEM-Methode zu analytischer Methode für die Dehnungen in der Ringfaser in Abhängigkeit von h/c ist in Abbildung 3.49 dargestellt. Die Verläufe in dieser Abbildung zeigen das Verhältnis $\varepsilon_{\phi} / \varepsilon_{\phi max}$ bei verschiedenen Werten für r/c in Abhängigkeit von h/c . Es ist erkennbar, dass ein qualitativ ähnliches Verhalten wie bei den Verschiebungen $u_{xmax_FEM} / u_{xmax_ana}$ auftritt, siehe Abbildung 3.44.

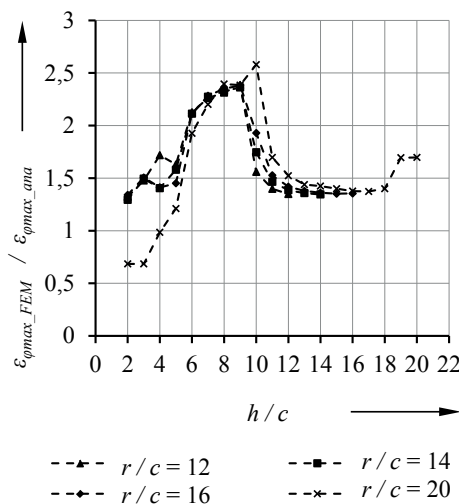


Abbildung 3.49: Verlauf des Verhältnisses von $\varepsilon_{\phi\max_FEM} / \varepsilon_{\phi\max_ana}$ in Abhängigkeit von h/c für verschiedene r/c mit $r/c = 12, 14, 16, 20$

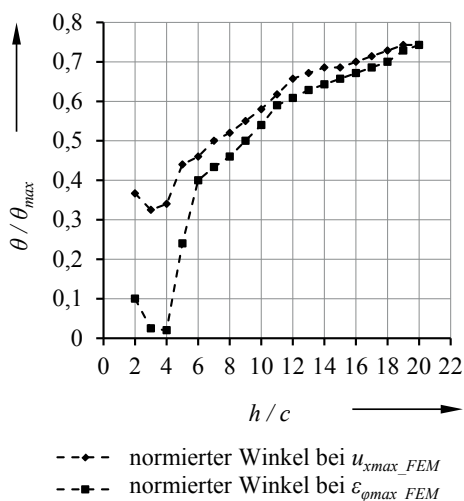


Abbildung 3.50: Verlauf des normierten Winkels, bei dem die maximalen Verschiebungen $u_{x\max}$ und Dehnungen $\varepsilon_{\phi\max}$ bei FEM-Berechnungen auftreten

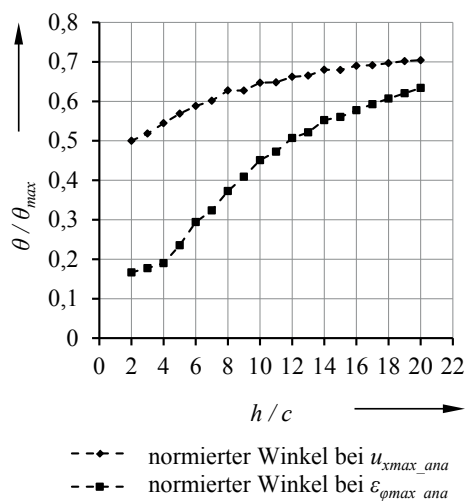


Abbildung 3.51: Verlauf des normierten Winkels, bei dem die maximalen Verschiebungen $u_{x\max}$ und Dehnungen $\varepsilon_{\phi\max}$ bei analytischen Berechnungen auftreten

Die vorangegangenen Abbildungen (Abbildung 3.50 und Abbildung 3.51) zeigen den direkten Vergleich der untersuchten Größen u_x und ε_ϕ für die jeweilige Modellierungsmethode. Der Vergleich zeigt bei den FEM-Berechnungen, dass die Maxima der Verschiebungen

und Dehnungen bei flachen sphärischen Strukturen an stark unterschiedlichen Stellen auftreten. Mit weiterer Erhöhung von h/c liegen die Kurven nahe beieinander, wobei sich der vertikale Abstand zueinander verringert und bei $h/c = 20$ zu Null wird. Mit der analytischen Methode zeigt sich, dass die maximalen Verschiebungen u_{xmax} bei höheren normierten Öffnungswinkeln θ/θ_{max} als die Dehnungen $\varepsilon_{\phi max}$ auftreten. Das heißt, die Verschiebungen treten in der Mitte ($\theta/\theta_{max} = 0,5$) bezüglich des Wertebereiches des normierten Öffnungswinkels auf. Mit Erhöhung von h/c verschiebt sich u_{xmax} bis zu $\theta/\theta_{max} = 0,7$, was leicht außer mittig liegt. Demgegenüber treten die maximalen Dehnungen bei flachen sphärischen Strukturen zunächst im Bereich des Scheitels ($\theta/\theta_{max} = 0,17$) auf. Mit Steigerung von h/c verschiebt sich $\varepsilon_{\phi max}$ weiter in die Mitte des Wertebereichs des normierten Öffnungswinkels bis $\theta/\theta_{max} = 0,63$ als Maximum erreicht ist.

Der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und Dehnungen bzgl. Ihrer Positionen ist mit der FE-Methode klarer und eindeutiger ermittelbar. Der Vergleich der Abbildung 3.50 mit Abbildung 3.51 lässt erkennen, dass die Verläufe der normierten Winkel aus den Ergebnissen nach Modellierungsmethode 2 unterschiedliche Anstiege besitzen. Demgegenüber verlaufen die Kurven der normierten Winkel nach Modellierungsmethode 1 bis zu einem Wert von $h/c = 6$ nahezu parallel und dann qualitativ ähnlich. Zudem führt die lineare Schalentheorie zu kleineren Verformungen und Dehnungen als die FEM, siehe Abbildung 3.44 und Abbildung 3.49. Aus diesen Gründen wird eine weitere Modellierung der untersuchten Strukturen mit der nichtlinearen FE-Methode empfohlen.

3.4 FEM-Berechnung und Auswertung eines 3D-Modells

Die bisherigen Untersuchungen fanden unter der Annahme statt, dass ein rotationssymmetrisches Verformungsverhalten vorliegt. Um zu prüfen, wie sich sphärische Strukturen aus nichtlinear elastischem Material verhalten, wenn sie ohne die Einschränkung auf rotationssymmetrische Verformung untersucht werden, wird ein erweitertes Modell erstellt und berechnet. Das Ziel der erweiterten Betrachtungsweise ist es, weitere Aussagen über das Verformungsverhalten und die Durchschlagcharakteristik der untersuchten Strukturen treffen zu können.

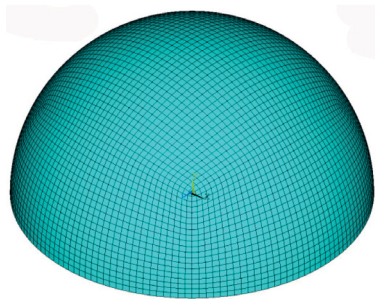


Abbildung 3.52: 3D-Modell der sphärischen Referenzstruktur

Zu Beginn wird die sphärische Referenzstruktur in 3D modelliert (Abbildung 3.52). Das Modell wird am ringförmigen unteren Rand fest eingespannt und von außen mit einem Druck belastet.

Die Berechnungen mit dem Bogenlängenverfahren führten bei dem 3D-Modell zu erheblichen Konvergenzproblemen. Die Berechnungen konnten mit ANSYS unter der Nutzung des Bogenlängenverfahrens nicht vollständig abgeschlossen werden. Das Programmpaket stellt jedoch eine weitere Möglichkeit zur Verfügung, mit der die bereits beschriebenen Konvergenzprobleme des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens (siehe Abschnitt 2.5) gelöst werden können. Diese Möglichkeit wird durch den APDL-Befehl „stabilize“ bereitgestellt. In der ANSYS-Reference wird das Verfahren ausführlich beschrieben, daher wird an dieser Stelle auf eine Beschreibung der Wirkungsweise des Befehls verzichtet.

Die vollständige Berechnung des instabilen nachkritischen Verhaltens ist mit der „stabilize“-Methode nicht möglich. Es können die kritische Last und die Verformung der Struktur ermittelt werden, jedoch keine Lastverläufe mit negativem Anstieg, siehe Kapitel 2.5. Im weiteren Verlauf des Kapitels wird das Modell, welches mit dem Bogenlängenverfahren und unter der Annahme eines rotationssymmetrischen Verhaltens berechnet wurde, als *Modell 1* bezeichnet. Das neue Modell, ohne die Annahme des rotationssymmetrischen Verhaltens und unter der Nutzung des „stabilize“-Befehls, wird *Modell 2* genannt. Ergänzend wird zum Vergleich der Berechnungsmethoden das Modell mit rotationssymmetrischem Verformungsverhalten auszugsweise mit der „stabilize“-Methode berechnet. Dieses Modell wird *Modell 3* genannt.

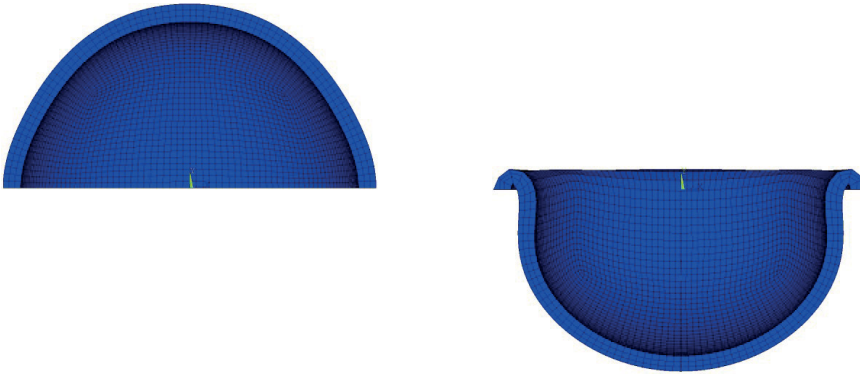


Abbildung 3.53: links: Verformte sphärische 3D-Referenzstruktur im Querschnitt vor dem Durchschlag rechts: Verformte sphärische 3D-Referenzstruktur im Querschnitt nach dem Durchschlag

In der Abbildung 3.59 ist der Last-Verschiebungs-Verlauf der sphärischen 3D-Referenzstruktur dargestellt. Er zeigt die Verschiebung des Scheitelpunktes während des Belastungsvorganges. Im Diagramm sind zwei Abschnitte erkennbar, in denen die Kurve nahezu horizontal verläuft.

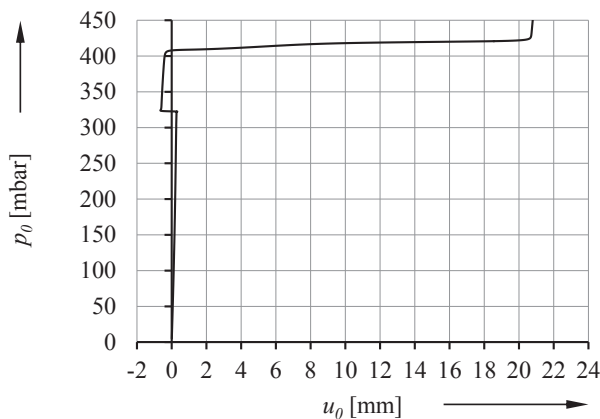


Abbildung 3.54: Last-Verschiebungs-Verlauf der sphärischen 3D-Referenzstruktur unter Nutzung des „stabilize“-Befehls

Der Verlauf lässt den Schluss zu, dass die sphärische Struktur zwei kritische Punkte im Last-Verschiebungs-Verhalten aufweist. Für die Vergleichbarkeit wird auch bei dieser Art des Verlaufs der erste kritische Punkt als Durchschlaglast herangezogen.

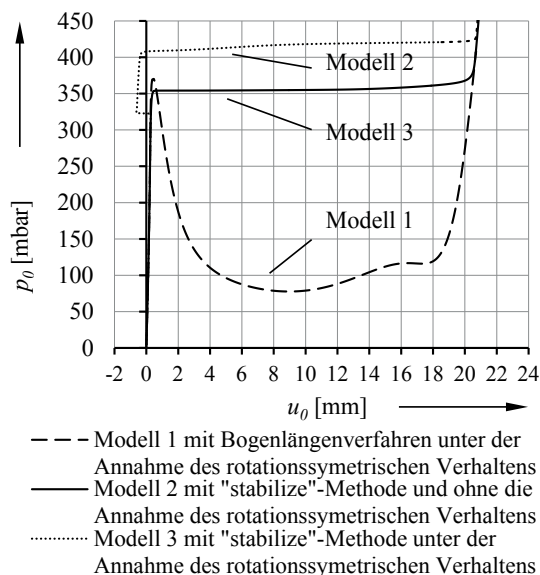


Abbildung 3.55: Vergleich der Last-Verschiebungs-Verläufe der sphärischen Referenzstrukturen unter den verschiedenen Verhaltensannahmen und Berechnungsmethoden

Die Abbildung 3.55 zeigt den Vergleich der $p_0(u_0)$ -Verläufe der sphärischen Referenzstrukturen (Modell 1, 2 und 3). Es ist zu erkennen, dass sich die Kurven von Modell 1 zu den Modellen 2 und 3 aufgrund der Berechnungsmethoden qualitativ unterscheiden. Es ist jedoch erkennbar, dass Modelle 1 und 3 im Gegensatz zu Modell 2 nur einen kritischen Punkt aufweisen. Zudem führt Modell 2 eine kurze Richtungsumkehr mit Erreichen der ersten kritischen Last durch. Weiterhin ist feststellbar, dass die Modelle 2 und 3 eine geringere kritische Last aufweisen als Modell 1, wobei die Abweichung zwischen den Modellen 1 und 3 auf numerische Fehler zurückzuführen ist.

Die folgenden Abbildungen, Abbildung 3.57 und Abbildung 3.58, zeigen die Spannungsverteilung, die Verschiebungen und die Verteilung der eingepprägten Stabilisierungsenergie im Modell 2. Hierbei deuten die Spannungen und Verschiebungen zunächst auf eine asymmetrische Verformung hin. Mit der zusätzlichen Darstellung der eingepprägten Stabilisierungsenergie zeigt sich, in welchen Bereichen das Durchschlagen einsetzt. Die Stabilisierungsenergie ist als Dämpfungsenergie zu verstehen und wird durch den „stabilize“-Befehl aktiviert. In Abbildung 3.58 ist erkennbar, in welchem Bereich die lokale Einprägung einer Stabilisierungsenergie erfolgt, um die betreffenden Elemente in ihrer Verfor-

mung pro Zeitschritt zu dämpfen. Zum Vergleich sind auch die Spannungen, Abbildung 3.59, und Verschiebungen, Abbildung 3.60, des Modells 1 abgebildet.

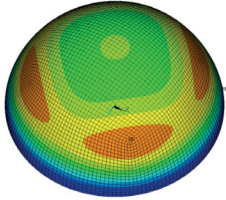


Abbildung 3.56: Beträge der Verschiebungen bei anliegender kritischer Last im Modell 2

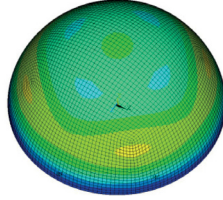


Abbildung 3.57: Von Mises-Spannungsverteilung im Modell 2 bei anliegender kritischer Last

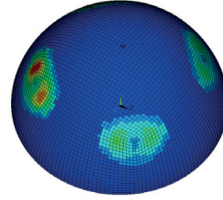


Abbildung 3.58: Verteilung der eingepprägten Stabilisierungsenergie bei anliegender kritischer Last im Modell 2

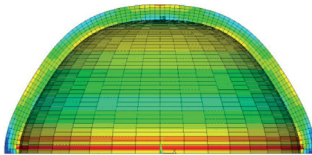


Abbildung 3.59: Von Mises-Spannungsverteilung im Modell 1 bei anliegender kritischer Last

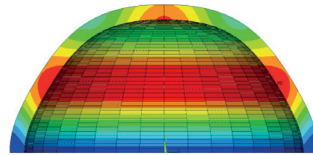


Abbildung 3.60: Beträge der Verschiebungen bei anliegender kritischer Last im Modell 1

Der Vergleich der Spannungen und Verschiebungen bei anliegender kritischer Last, Abbildung 3.56 und Abbildung 3.59, zeigt einen signifikanten Unterschied der Ergebnisse aus den verschiedenen Berechnungsmodellen. Mithilfe der 3-dimensionalen Betrachtungsweise werden lokale asymmetrische Verformungen ermittelt, die mit den Modellen 1 und 3 und der Einschränkung auf rotationssymmetrisches Verhalten nicht zu berechnen sind.

Die gezeigten Ergebnisse, Abbildung 3.57 und Abbildung 3.58, konnten nur mithilfe der zusätzlich eingepprägten Stabilisierungsenergie erzielt und das asymmetrische Verhalten bezüglich der Rotationsachse kann an diesem Beispiel ebenfalls nur über die Lokalisierung der eingepprägten Stabilisierungsenergie nachgewiesen werden. Die Ergebnisse sind zudem weitestgehend netzunabhängig. Das heißt, dass die lokalen asymmetrischen Verformungen unabhängig von der Netzqualität bzw. – dichte in den gezeigten Bereichen auftreten. Ein feineres Netz führt lediglich dazu, dass eine höhere räumliche Auflösung der lokalen Asymmetrien erfolgen kann.

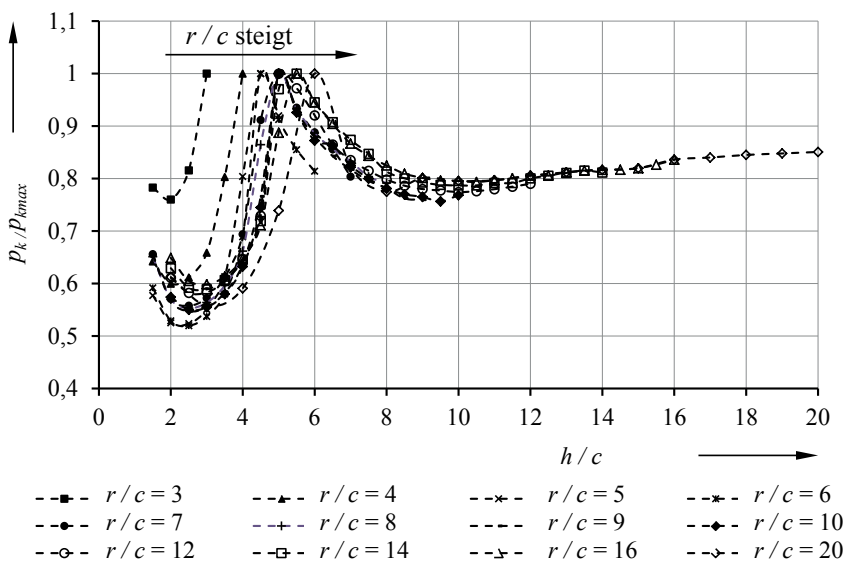


Abbildung 3.61: Verläufe von den kritischen Lasten nach Modell 2 in Abhängigkeit von h/c mit Normierung auf den jeweiligen Maximalwert pro r/c – Verhältnis ($r/c = 2, \dots, 10, 12, 14, 16, 20$)

Zur weiteren Gegenüberstellung der Berechnungsmodelle sind in Abbildung 3.61 die Verläufe der normierten Last p_k / p_{kmax} in Abhängigkeit vom Verhältnis h/c bei verschiedenen Werten für r/c dargestellt, vergleiche dazu Abbildung 3.15. In Abbildung 3.61 ist ersichtlich, dass das lokale Maximum der Kurven mit zunehmendem r/c bei größerem h/c liegt. Dieses Verhalten ist auch bei dem Modell 1 feststellbar. Im Vergleich zeigt sich jedoch, dass das Maximum bei dem Modell 2 bei geringerem h/c , im Bereich von $2,5 < h/c < 6$, auftritt als bei Modell 1 mit $4 < h/c < 10$.

Weiterhin ist es von Interesse, wie sich die sphärischen Strukturen im Durchschlagpunkt verformen. Dazu werden die eingeprägte Stabilisierungsenergie und die Verformung im Scheitelpunkt an jedem Modell ausgewertet. Mithilfe der Auswertung ergibt sich, dass das Modell 2 verschiedene Charakteristiken des Durchschlagbeginns in Abhängigkeit von den geometrischen Parametern aufweist. Es wird beispielsweise die Stabilisierungsenergie symmetrisch in der Form eines Kreises im Bereich des Scheitels eingepreßt, Abbildung 3.62 a. Oder die Einprägung der Stabilisierungsenergie erfolgt ringförmig und symmetrisch, Abbildung 3.62 b. Eine weitere Form ist in Abbildung 3.62 c dargestellt

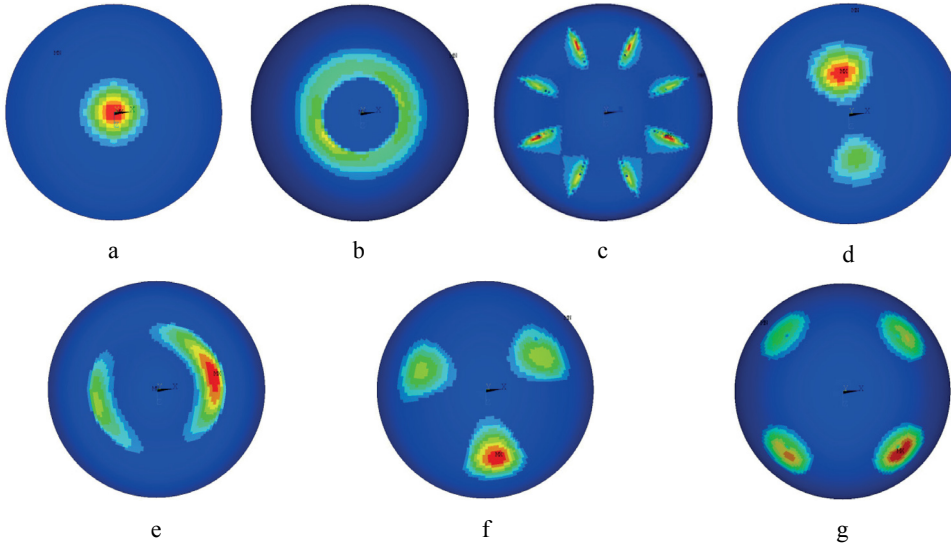


Abbildung 3.62: Darstellung der verschiedenen Bereichsformen, in denen das Durchschlagen von unterschiedlichen sphärischen Strukturen beginnt.

Diese Darstellung lässt eine ringförmige Anordnung von fünf lokalen Durchschlagstellen erkennen. Mit Abbildung 3.62 d bis g werden weitere Formen dargestellt, die beobachtet werden, wenn ein Durchschlagverhalten eintritt. Die Formen zeigen zwei Bogenareale, Abbildung 3.62 e und zwei bis vier lokale Bereiche, in denen das Durchschlagen beginnt, Abbildung 3.62 d, f und g. Die Untersuchungen zeigen zudem, dass die sphärischen Strukturen bis zu einem bestimmten Wert von h/c in Abhängigkeit von r/c rotations-symmetrisches Verhalten aufweisen. In Abbildung 3.63 ist der Verlauf der Grenze von h/c für symmetrisches Durchschlagen in Abhängigkeit vom geometrischen Verhältnis r/c dargestellt. Es zeigt sich, dass die Grenze mit steigendem Wert für r/c weniger von diesem Wert beeinflusst wird und sich einem Grenzwert annähert. Dies bedeutet, dass dicke, hohe sphärische Strukturen, mit $3 \leq r/c \leq 9$, $2,5 \leq h/c \leq 5$, zu rotationssymmetrischem Durchschlagen und dünne Strukturen, mit $9 < r/c$, ab einem Wert von $h/c = 5$ zu lokalen instabilen Bereichen neigen.

Die Verschiebungen des Scheitelpunktes in Modell 2 bei anliegender kritischer Last weisen eine ähnliche Charakteristik der Abhängigkeit der geometrischen Verhältnisse auf wie die Verschiebungen in Modell 1. In Abschnitt 3.2.3 konnte gezeigt werden, dass die Verschiebung des Scheitelpunktes bei anliegender kritischer Last nur gering vom Wert für r/c beeinflusst wird.

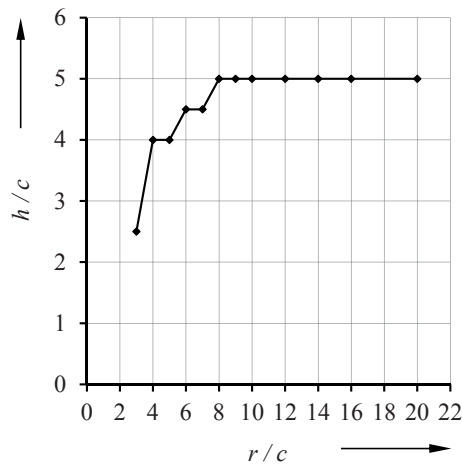


Abbildung 3.63: Darstellung der Grenze von h/c für symmetrisches Durchschlagen an sphärischen Strukturen in Abhängigkeit von r/c

Dieses Verhalten zeigt auch das Modell 2. Aus diesem Grund wird im Folgenden nur der exemplarische Verlauf der Verschiebung des Scheitelpunktes in Abhängigkeit von h/c für sphärische Strukturen mit $r/c = 20$ dargestellt und mit dem Verlauf nach Modell 1 verglichen.

Der exemplarische Vergleich zeigt, dass die Ergebnisse der verschiedenen Modelle bis zu einem Wert von $h/c = 7$ nahezu identisch sind. Für den Anfangsbereich $1,5 \leq h/c \leq 7$ bedeutet das, dass die Verschiebungen des Scheitelpunktes bei anliegender kritischer Last unabhängig von der Berechnungsmethode und dem Modell sind. Des Weiteren weisen die Verläufe zunächst einen negativen Anstieg und ein lokales Minimum auf, wobei das Minimum nach Modell 1 niedriger ist. Weiterhin verfügen beide Verläufe über einen Bereich mit positivem Anstieg, der in ein lokales Maximum übergeht. Im Bereich $14 \leq h/c \leq 18$ sind die Verschiebungen der beiden Modelle nahezu identisch.

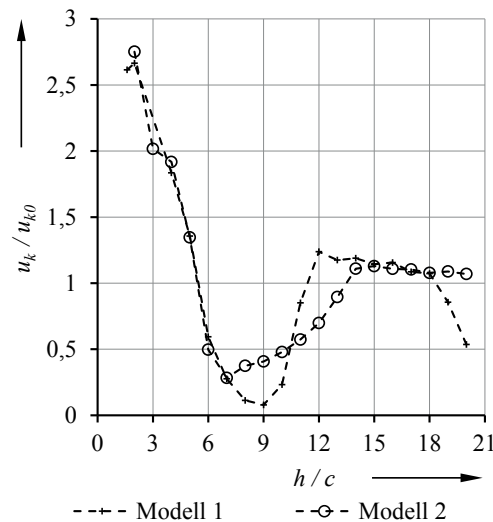


Abbildung 3.64: Vergleich der Verschiebung des Scheitelpunktes bei anliegender kritischer Last zwischen den Modellen 1 und 2

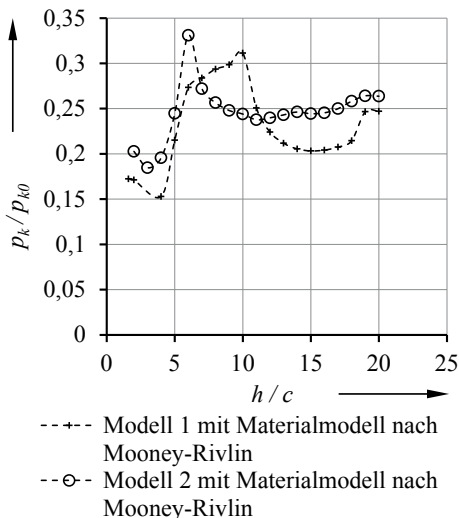


Abbildung 3.65: Vergleich der Verläufe der kritischen Lasten in Abhängigkeit von h / c von Modell 1 und Modell 2 mit $r / c = 20$

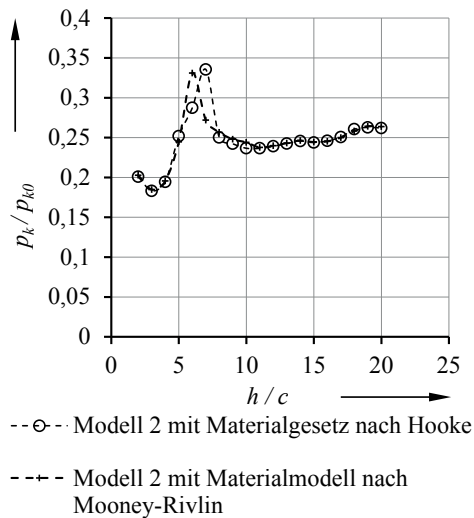


Abbildung 3.66: Vergleich der Verläufe der kritischen Lasten in Abhängigkeit von h / c des Modells 2 mit linearem und nichtlinearem Materialgesetz und mit $r / c = 20$

Der direkte Vergleich zwischen den Modellen 1 und 2 bezüglich des Verlaufes der kritischen Last p_k / p_{k0} in Abhängigkeit von dem geometrischen Verhältnis h / c ist in Abbildung 3.65 dargestellt. Die Kurven sind qualitativ unterschiedlich. Beide Kurven weisen

ein lokales Minimum bei $h/c = 3$ bis 4. Dem Minimum folgt ein lokales Maximum bei der Kurven, wobei das Maximum der Kurve nach Modell 2 bereits bei flacheren Strukturen auftritt als bei Modell 1. Die Verläufe lassen auch erkennen, dass die kritischen Lasten im Bereich von $h/c = 8, \dots, 20$ innerhalb der Kurve des Modells 2 nur geringe Unterschiede aufweisen, wohingegen die Kurve für Modell 1 stärker vom Wert h/c beeinflusst wird. Die geringen Unterschiede im Modell 2 bedeuten weiterhin, dass der Einfluss von h/c auf die normierte kritische Last in diesem Bereich sehr gering ist. Die Lastdifferenz beträgt maximal $p_k/p_{k0} = 0,025$. Der Vergleich lässt weiterhin den Schluss zu, dass die Reduzierung auf eine eingeschränkte rotationssymmetrische Betrachtungsweise nur in einem begrenzten Bereich für h/c erfolgen kann, siehe auch Abbildung 3.63.

Um ergänzend das Verhalten unter der Nutzung von verschiedenen Materialmodellen zu überprüfen, wird mit Modell 2 exemplarisch eine Berechnungsreihe für $r/c = 20$ durchgeführt. Der Vergleich erfolgt analog zu Abschnitt 3.2.4 mit linearen Materialeigenschaften nach dem Materialgesetz von HOOKE und mit nichtlinearen Materialeigenschaften nach dem Materialmodell nach MOONEY-RIVLIN. Die Ergebnisse der Berechnungen zeigen, dass die Approximation des nichtlinearen Materialverhaltens auf ein linear elastisches Materialverhalten zulässig ist, da die Kurven einen nahezu deckungsgleichen Verlauf aufweisen, siehe Abbildung 3.66.

3.5 Zusammenfassung

Zusammenfassend zeigen die berechneten kritischen Lasten an sphärischen Strukturen aus einem nichtlinear elastischen Material und mit rotationssymmetrischen Verformungseigenschaften ein qualitativ ähnliches Verhalten, wie es in den bereits veröffentlichten Beiträgen (z. B. Budiansky 1959; Budiansky 1962) beschrieben wird. Die $p_k/p_{k0}(h/c)$ -Verläufe weisen den gleichen Charakter auf wie die $p_k/p_z(\lambda)$ -Verläufe von sphärischen Strukturen aus einem linear ideal elastischen Material, welche beispielsweise in den Arbeiten von BUDIANSKY 1959 und WESSELS 1977 beschrieben und untersucht werden. Was schließlich darauf deutet, dass das Materialverhalten (linear oder nichtlinear) mit den zugrunde gelegten Zugversuchsdaten und im untersuchten Dehnungsbereich nur marginalen Einfluss auf das qualitative Verhalten hat. Die Untersuchungen zeigen außerdem, dass die Kurven der kritischen Lasten p_k/p_{k0} in Abhängigkeit vom geometrischen Verhältnis h/c unterschiedlich viele Extremstellen aufweisen. Durch die Darstellung der Kurven

$p_k/p_{k0}(h/c)$ (Abbildung 3.9 bis Abbildung 3.11) ist auch erkennbar, dass sphärische Strukturen existieren, die trotz unterschiedlicher Werte für h/c zu identischen Durchschlaglasten führen.

Die ermittelten Minima deuten auf flache sphärische Strukturen hin ($h/c \approx 2,41$), mit denen eine möglichst geringe Durchschlaglast erzielt werden kann. Diese Strukturen verfügen über eine besonders niedrige Steifigkeit im Vergleich zu den anderen untersuchten sphärischen Strukturen. Die Maxima wiederum deuten auf sphärische Strukturen hin ($h/c \approx 8,44$), mit denen möglichst hohe Durchschlaglasten erzielt werden können.

Unter der Annahme eines rotationssymmetrischen Verhaltens ergeben die Berechnungen weiterhin, dass die sphärischen Strukturen verschiedene Durchschlagcharakteristika aufweisen. So treten Strukturen mit einem Mono-Durchschlagverhalten auf und Strukturen mit einem Multi-Durchschlagverhalten. Mono-Durchschlagverhalten bedeutet, dass im $p_k/p_{k0}(h/c)$ -Verlauf nur eine obere kritische Last auftritt, die ein instabiles Verhalten nach sich zieht. Demgegenüber bedeutet Multi-Durchschlagverhalten, dass im $p_k/p_{k0}(h/c)$ -Verlauf mindestens zwei obere kritische Lasten auftreten, die zur Instabilität an der sphärischen Struktur führen. Mithilfe der Auswertung der Berechnungsergebnisse konnten die sphärischen Strukturen anhand ihrer geometrischen Verhältnisse in Strukturen mit Mono- und Multi-Durchschlagcharakteristik unterteilt werden, siehe dazu Abbildung 3.16. Zudem konnte ein Bereich in Abhängigkeit von r/c definiert werden, in dem geometrische Verhältnisse auftreten, mit denen sphärische Strukturen kein Durchschlagverhalten zeigen, siehe Tabelle 3.1.

Das charakteristische Druck-Verschiebungs-Verhalten kann auch durch das Verhältnis der projizierten Kreisfläche der sphärischen Strukturen auf die xz -Ebene zu einer Zylinderfläche, die um die y -Achse rotiert und den Radius und die Höhe der sphärischen Strukturen besitzt, in Bereiche eingeteilt werden, siehe Abbildung 3.17 und Das Verhältnis der beiden Flächen zueinander wird, gemäß Gleichung (3.3) vom Grundradius r und von der Höhe h beeinflusst. Der Quotient V_{HV} steigt an, wenn r/h verringert wird. In Abbildung 3.19 und Abbildung 3.20 ist der Bereich für V_{HV} in Abhängigkeit von h_a/c bzw. r_a/c , in dem Multi-Durchschlagverhalten auftritt, durch rote Punkte markiert.

Mithilfe der Darstellung in Abbildung 3.19 und Abbildung 3.20 ist erkennbar, welche geometrischen Kennwerte eine sphärische Struktur aufweisen muss, um eine möglichst geringe Nachgiebigkeit und folglich hohen Durchschlagdruck zu realisieren.

Tabelle 3.2. Die Einteilung zeigt auch, dass der Einfluss der horizontalen Druckkomponente bei hohen und dicken sphärischen Strukturen dominiert. Diese Dominanz nimmt jedoch mit Vergrößerung des Wertes r/c wieder ab. Ergänzend sind im Anhang A die qualitativen Druck-Verschiebungs-Verläufe dargestellt, die mit den durchgeführten Berechnungen ermittelt wurden.

Die Betrachtung der Verschiebung des Scheitelpunktes der sphärischen Strukturen zeigte, dass das Verhältnis u_k / u_{k0} in erster Linie von h/c bestimmt wird und der Einfluss von r/c mit wachsendem Wert sinkt, siehe Abbildung 3.27.

Im Abschnitt 3.2.4 wurde das Spannungs-Dehnungs-Verhalten der sphärischen Strukturen bei anliegender kritischer Last untersucht. Die Verläufe der Spannungen in Abhängigkeit von h/c zeigen die erhöhte Steifigkeit der sphärischen Strukturen mit $h/c \approx 8,44$ und bestätigen die Ergebnisse aus Abschnitt 3.2.1. Weiterhin zeigen die Ergebnisse, dass durchgeschlagene sphärische Strukturen mit Werten von $r/c \geq 10$ und $h/c \leq 6$ Spannungen aufweisen, die im quasi-linearen Bereich des Spannungs-Dehnungs-Verlaufes eines uniaxialen Zugversuches liegen. Aufgrund dessen kann das nichtlineare Materialmodell durch ein lineares Materialgesetz nach HOOKE approximiert werden. Die vergleichenden Berechnungen zu den unterschiedlichen Materialmodellen ergeben im vorliegenden Fall, dass die Approximation eines nichtlinear elastischen Materials durch ein linear elastisches Material keinen Einfluss auf die Durchschlaglasten hat. Demgegenüber weisen die auftretenden Spannungen nicht vernachlässigbare Unterschiede auf.

Die Gegenüberstellung von zwei Berechnungsmethoden (FEM – lineare Schalentheorie) ergibt, dass die Ergebnisse für bestimmte Geometrieparameter vergleichbar sind. Das heißt, dass sich die Verläufe der Verformungen und Dehnungen in Abhängigkeit der geometrischen Parameter qualitativ gleichen. Diese Parameter führen zu sphärischen Strukturen, welche der Anforderung einer Schale mit $a/c \geq 10$ genügen. Bei dicken sphärischen Strukturen mit $a/c < 10$ stellt sich ein größerer, nicht vernachlässigbarer Unterschied ein, siehe Abbildung 3.43 und Abbildung 3.48. So ist die maximale Verschiebung in x -Richtung u_{xmax_FEM} von sphärischen Strukturen mit Werten für $h/c = 2,25, \dots, 4$

kleiner als die Verschiebungen u_{xmax_ana} . Für größere Werte für h/c stellen sich größere Verschiebungen u_{xmax_FEM} als u_{xmax_ana} ein. Das Verhältnis der Verschiebungen zueinander ist qualitativ mit dem $p_k/p_{k0}(h/c)$ -Verlauf vergleichbar. Zudem ist der qualitative Zusammenhang der Dehnungen in der Ringfaser ε_φ in Abhängigkeit von h/c mit den Verläufen der Verschiebungen $u_x(h/c)$ analog. Der direkte Vergleich der Verschiebungen mit den Dehnungen zeigt, dass sich die Maxima bei flachen sphärischen Strukturen mit Werten von $h/c \leq 6$ an unterschiedlichen Stellen befinden. Der Unterschied sinkt jedoch mit größer werdendem h/c . Die maximalen Dehnungen an flachen sphärischen Strukturen treten in der Nähe des Scheitels auf ($\theta/\theta_{max} \leq 0,4$). Die maximalen Verschiebungen hingegen treten im mittleren Bereich der Krümmung auf ($0,5 \leq \theta/\theta_{max} \leq 0,7$).

Abschließend konnte in diesem Kapitel der Unterschied von Berechnungsergebnissen mit zwei Berechnungsannahmen und Berechnungsarten (Annahme eines rotationssymmetrischen Verformungsverhaltens und Nutzung des Bogenlängenverfahrens verglichen mit uneingeschränktem Verformungsverhalten und Nutzung des „stabilize“-Befehls) gezeigt werden. Die unterschiedlichen Berechnungsarten bewirken, dass die Verläufe der kritischen Lasten in Abhängigkeit von h/c stark voneinander abweichen und die Berechnungsannahme eines uneingeschränkten Verformungsverhaltens zu asymmetrischen Verformungen - lokalen Instabilitäten - führt. Es konnten sieben verschiedene charakteristische Bereichsformen, in denen das Durchschlagen beginnt, identifiziert werden. Die Bereichsformen zeigen rotationssymmetrisches in Kreis- und Ringform oder asymmetrisches Verhalten in Bogenform oder mit zwei bis vier lokale Durchschlagstellen. Zudem werden geringere kritische Lasten berechnet, welche aufgrund der lokalen Beulen auf der sphärischen Struktur auftreten, die die gesamte Steifigkeit der Struktur herabsetzen. Weiterhin ist, im Gegensatz zur Betrachtungsweise mit der Annahme eines rotationssymmetrischen Verformungsverhaltens, der Einfluss von h/c auf die kritische Last bei hohen, dünnen sphärischen Strukturen ($r/c \geq 12$; $h/c \geq 12$) gering. Der Vergleich der Verschiebung des Scheitelpunktes bis zum Erreichen der kritischen Last zeigt jedoch, dass die Verschiebungen geringere Unterschiede aufweisen, trotz unterschiedlicher Berechnungs- und Betrachtungsarten.

4 Vergleich des Durchschlagverhaltens verschiedener rotationssymmetrischer Strukturen

4.1 Grundgedanke und Zielstellung des Formvergleichs

Die bisherigen Berechnungen beschränkten sich auf eine konstante geometrische Grundform, die Sphäre. In diesem Kapitel soll untersucht werden, welchen Einfluss die Form des Meridians auf das Durchschlagverhalten hat. Bei den Untersuchungen werden verschiedene Rotationskörper mit gleich großer druckbelasteter Oberfläche unter gleichmäßiger Druckbelastung berechnet und deren Durchschlag- und Verformungsverhalten einander gegenübergestellt.

Um verschiedene Rotationskörper zu entwickeln, wird die Form des Meridians variiert. Bei der Variation der Meridianform werden bestimmte festgelegte Eigenschaften berücksichtigt. Die Rotationskörper sollen über eine konstante druckbelastete Oberfläche A und Wandstärke c verfügen, wobei $A = 100 \pi \text{ mm}^2$ groß ist. Durch die Variation der Meridianform ist es möglich, eine Vielzahl von durchschlagfähigen Körpern zu erzeugen. Diese Arbeit beschränkt sich aufgrund der zahlreichen Möglichkeiten auf drei grundlegende Varianten.

Zu Beginn der Untersuchungen werden die geometrischen Parameter der betrachteten Strukturen in einen Zusammenhang zueinander gebracht, indem der Radius a des Horizontalkreises abhängig von der Höhe h der jeweiligen Struktur ist, und es soll erreicht werden, dass nur eine abhängige Größe (im vorliegenden Fall der Radius des Horizontalkreises) im Untersuchungsprozess auftritt. Dadurch kann die Höhe als einzige Variable herangezogen, und die erzielten Ergebnisse können miteinander verglichen werden.

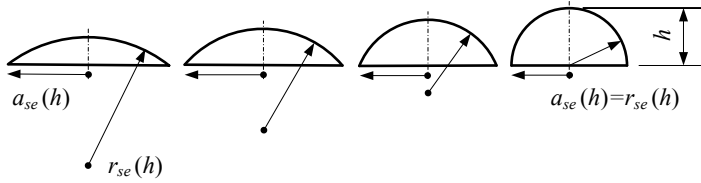


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung der Geometrievariation einer sphärischen Struktur

Als erste Variante wird eine sphärische Struktur betrachtet, welche sich bei konstanter Oberfläche A für verschiedene Höhen h durch den Radius des Horizontalkreises $a_{se}(h)$ und den Grundradius $r_{se}(h)$ beschreiben lässt, siehe Gleichungen (4.1) - (4.2) und Abbildung 4.1.

$$a_{se} = \frac{A}{2h\pi} \quad (4.1)$$

$$r_{se} = \sqrt{(-h^2 + a_{se}^2 + 2ha_{se} - a_{se}^2)} \quad (4.2)$$

Als zweite Variante wird eine Kegelstruktur untersucht, welche ebenfalls bei steigender Höhe h und konstanter Oberfläche A einen von h abhängigen Radius des Horizontalkreises $a_{ks}(h)$ aufweist.

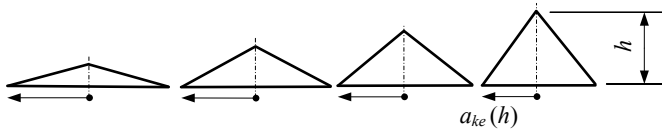


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung der Geometrievariation einer Kegelstruktur

$$a_{ke} = \sqrt{-\frac{h^2}{2} + \frac{\sqrt{4A^2 + h^4\pi^2}}{2\pi}} \quad (4.3)$$

Als dritte Variante wird eine Paraboloidstruktur mit einer Grundfunktion $y = b_{pa}x^2$ untersucht. Die Grundfunktion beinhaltet eine Variable b_{pa} , die Stauchung der Parabelfunktion, die bei konstanter Oberfläche A von der Höhe h abhängt. Der Radius des Horizontalkreises a_{pa} des Paraboloids ergibt sich aus der Höhe h und der Stauchung b_{pa} . Die druckbelastete Oberfläche des Rotationskörpers wird über die folgende Gleichung (4.4) bestimmt.

$$A = 2\pi \int x(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dx(y)}{dy} \right)^2} dy \quad (4.4)$$

mit

$$x(y) = a_{pa}(h) = \sqrt{\frac{h}{b_{pa}}} \quad (4.5)$$

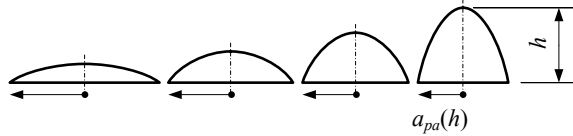


Abbildung 4.3: Schematische Darstellung der Geometrievariation einer Paraboloidstruktur

Die Integration der Gleichung (4.4) ergibt:

$$A = \frac{(\sqrt[3]{4hb_{pa} + 1} - 1)2\pi}{12b_{pa}^2} . \quad (4.6)$$

Es folgt für h :

$$h = \frac{\left(1 + \frac{6b_{pa}^2 A}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}} - 1}{4b_{pa}} . \quad (4.7)$$

Mithilfe der Gleichung (4.7) kann die Stauchung b_{pa} in Abhängigkeit von der Höhe h ermittelt und in (4.5) eingesetzt werden.

4.2 Berechnungsergebnisse für verschiedene rotationssymmetrische Strukturen

4.2.1 Sphärische Struktur

Die Berechnungen im Zuge des Formvergleiches werden analog zum Abschnitt 3.4 durchgeführt. Zu Beginn werden Modelle erstellt und berechnet, in denen die Annahme eines rotationssymmetrischen Verformungsverhaltens erfolgt. Dabei wird das Bogenlängenverfahren verwendet. Diese Modelle werden im weiteren Verlauf als *Modell 1* bezeichnet. Anschließend werden diese Modelle so erweitert, dass die Einschränkung des Verformungsverhaltens aufgehoben und mit der „stabilize“-Methode berechnet wird. Die erweiterten Modelle werden mit *Modell 2* bezeichnet, wobei in dem vorliegenden Ab-

schnitt Viertelmodelle berechnet werden. Diese Einschränkung kann erfolgen, da die Untersuchungen in Abschnitt 3.4 zeigten, dass die Bereiche, in denen das Durchschlagen beginnt, in rotationssymmetrischen Mustern auftreten, siehe Abbildung 3.62.

Abbildung 4.4 und Abbildung 4.5 zeigen die Druck-Verschiebungs-Verläufe von Sphärenelementen nach Modell 1. Die Abbildungen zeigen, dass sphärische Strukturen mit $h/c = 1,5, \dots, 5,5$ eine Mono-Durchschlagcharakteristik aufweisen, und nur die sphärische Struktur mit $h/c = 6$ zeigt Multi-Durchschlagcharakteristik. Bei den in diesem Abschnitt untersuchten sphärischen Strukturen konnte ein Durchschlagverhalten ab einem Wert von $h/c = 1,5$ festgestellt werden. Das Verhältnis $h/c = 6$ ist das maximal mögliche Verhältnis. Bei diesem Verhältnis wird eine Halbsphäre erzeugt.

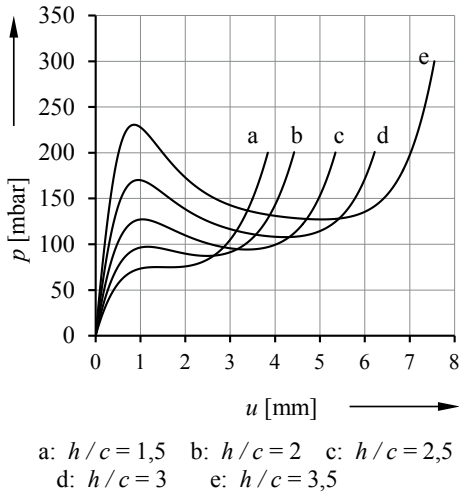


Abbildung 4.4: Druck-Verschiebungs-Verläufe von sphärischen Strukturen nach Modell 1 mit den geometrischen Verhältnissen $h/c = 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5$

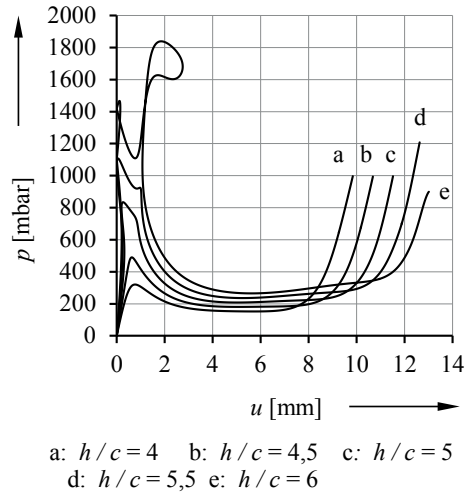


Abbildung 4.5: Druck-Verschiebungs-Verläufe von sphärischen Strukturen nach Modell 1 mit den geometrischen Verhältnissen $h/c = 4, 4,5, 5, 5,5, 6$

Die folgenden Abbildungen zeigen die Verformungen, Abbildung 4.6, die Spannungsverteilungen, Abbildung 4.7, die Verschiebungen, Abbildung 4.8, sowie die Verteilung der zusätzlich eingepprägten Stabilisierungsenergie, Abbildung 4.9, an sphärischen Strukturen nach Modell 2 auszugswweise für $h/c = 2$ und $h/c = 6$.

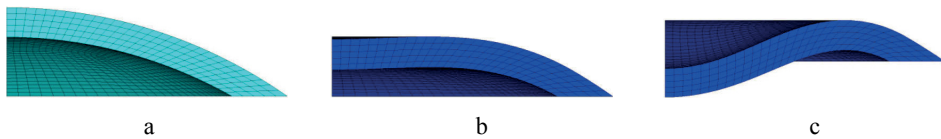


Abbildung 4.6: Unverformte (a) und verformte sphärischen Struktur im Modell 2 mit $h/c = 2$ bei anliegender kritischer Last (b) und nach dem Durchschlag (c)

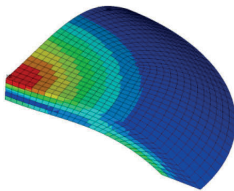


Abbildung 4.7: Spannungsverteilung bei anliegender kritischer Last an einer sphärischen Struktur im Modell 2 mit $h/c = 2$ vor dem Durchschlag

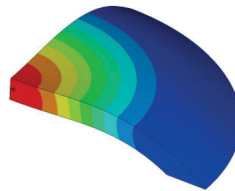


Abbildung 4.8: Beträge der Verschiebungsvektoren bei anliegender kritischer Last an einer sphärischen Struktur im Modell 2 mit $h/c = 2$ vor dem Durchschlag

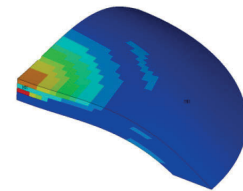


Abbildung 4.9: Darstellung der zusätzlich eingepprägten Stabilisierungsenergie bei anliegender kritischer Last an einer sphärischen Struktur im Modell 2 mit $h/c = 2$ vor dem Durchschlag

Die Darstellungen zeigen, dass sich die Strukturen bis zum Durchschlagpunkt rotationssymmetrisch verformen. In Abbildung 4.9 ist zu sehen, dass die eingepprägte Stabilisierungsenergie im Scheitelbereich in rotationssymmetrischer Form anliegt. In diesem Bereich sind diejenigen Finiten-Elemente vorzufinden, deren Bewegungsenergie aufgrund des beginnenden Durchschlages gedämpft werden muss, um eine Konvergenz im Berechnungsablauf zu erzielen. Die Konzentration der gedämpften Elemente im Scheitelbereich lässt den Schluss eines rotationssymmetrischen Durchschlages zu. Diese Annahme wird auch durch die Verläufe in Abbildung 4.10 und Abbildung 4.11, welche den Vergleich zwischen berechneten Strukturen nach Modell 1 und Modell 2 zeigen, untermauert. Die Verläufe weisen eine nahezu vollständige Übereinstimmung bezüglich der Durchschlaglasten und Verschiebungen im Scheitel bei anliegender kritischer Last auf.

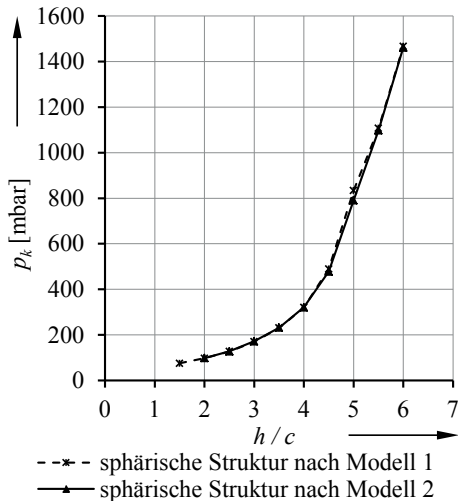


Abbildung 4.10: Verläufe der kritischen Lasten in Abhängigkeit von h/c für die berechneten sphärischen Strukturen nach Modell 1 und Modell 2

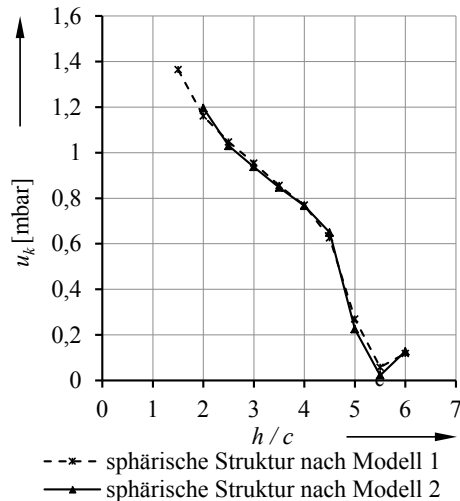
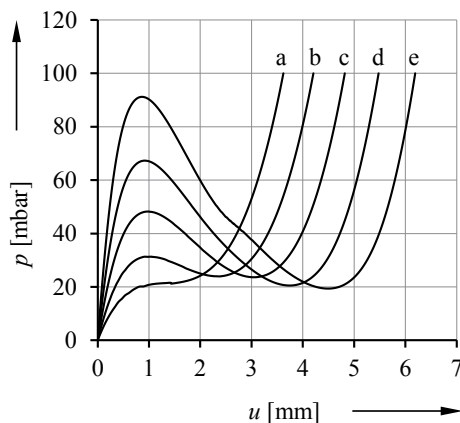


Abbildung 4.11: Verläufe der Verschiebungen im Scheitel bei anliegender kritischer Last in Abhängigkeit von h/c für die berechneten sphärischen Strukturen nach Modell 1 und Modell 2

Die in diesem Abschnitt untersuchten sphärischen Strukturen befinden sich alle im Bereich für rotationssymmetrisches Verformungsverhalten (siehe Abbildung 3.63). Dies rührt daher, dass durch die konstant gehaltene Oberfläche A und Wandstärke c , das Verhältnis von r/c von h/c abhängt. Das bedeutet im Weiteren, dass sich die untersuchten Geometrieverhältnisse, außer mit $h/c = 6$, im Bereich für Mono-Durchschlagcharakteristik befinden, siehe Abschnitt 3.2.2 Abbildung 3.17.

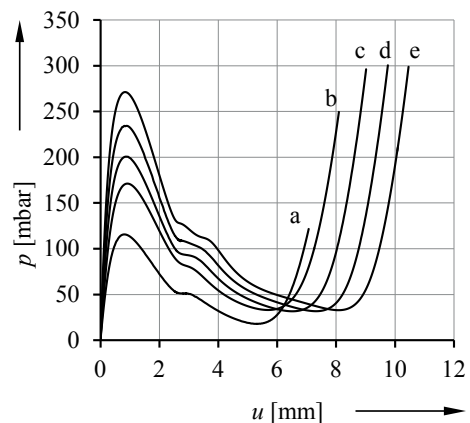
4.2.2 Kegelstruktur

In Abbildung 4.12 und Abbildung 4.13 werden die berechneten $p(u)$ -Verläufe für Kegelstrukturen gezeigt.



a: $h/c = 1,5$ b: $h/c = 2$ c: $h/c = 2,5$
d: $h/c = 3$ e: $h/c = 3,5$

Abbildung 4.12: Last-Verschiebungs-Verläufe von Kegelstrukturen mit den geometrischen Verhältnissen $h/c = 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5$



a: $h/c = 4$ b: $h/c = 4,5$ c: $h/c = 5$
d: $h/c = 5,5$ e: $h/c = 6$

Abbildung 4.13: Last-Verschiebungs-Verläufe von Kegelstrukturen mit den geometrischen Verhältnissen $h/c = 4, 4,5, 5, 5,5, 6$

Die folgenden Abbildungen zeigen zum einen die Geometrie für ein h/c , bei der die Durchschlagfähigkeit unter den untersuchten Kegelstrukturen zuerst auftritt, Abbildung 4.14, und zum anderen die Struktur mit dem maximal möglichen h/c bei $h/c = 6$, Abbildung 4.15. Die Limitation der Variation von h/c wird durch die sphärische Struktur gegeben, um die Vergleichbarkeit zu wahren. Es wird somit keine weitere Erhöhung der Kegelstruktur vorgenommen und untersucht.

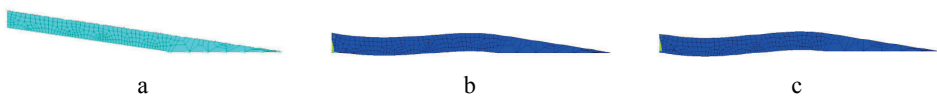


Abbildung 4.14: Unverformte (a) und verformte Kegelstruktur mit $h/c = 1.5$ unmittelbar vor (a) und nach (b) dem Durchschlagen.

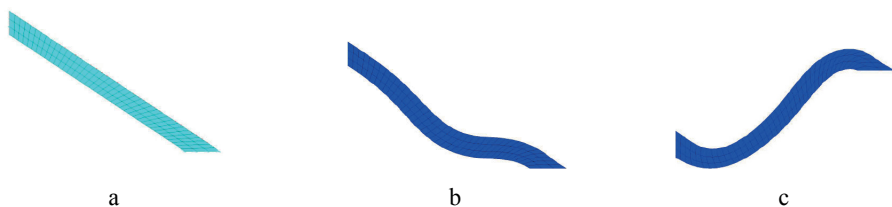


Abbildung 4.15: Unverformte (a) und verformte Kegelstruktur mit $h/c = 6$ unmittelbar vor (b) und nach (c) dem Durchschlagen.

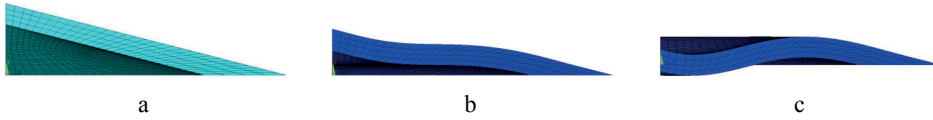


Abbildung 4.16: Unverformte (a) und verformte Kegelstruktur im Modell 2 mit $h/c = 2,5$ unmittelbar vor (b) und nach (c) dem Durchschlagen

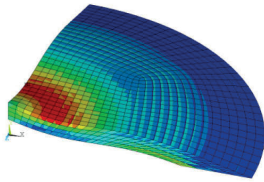


Abbildung 4.17: Spannungsverteilung bei anliegender kritischer Last an einer Kegelstruktur im Modell 2 mit $h/c = 2,5$ vor dem Durchschlag

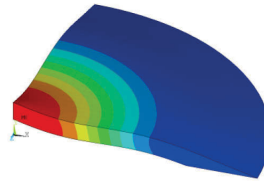


Abbildung 4.18: Beträge der Verschiebungsvektoren bei anliegender kritischer Last an einer Kegelstruktur im Modell 2 mit $h/c = 2,5$ vor dem Durchschlag

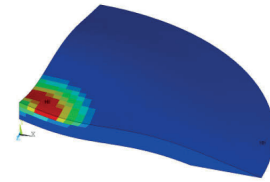


Abbildung 4.19: Darstellung der zusätzlich eingprägten Stabilisierungsenergie bei anliegender kritischer Last an einer Kegelstruktur im Modell 2 mit $h/c = 2,5$ vor dem Durchschlag

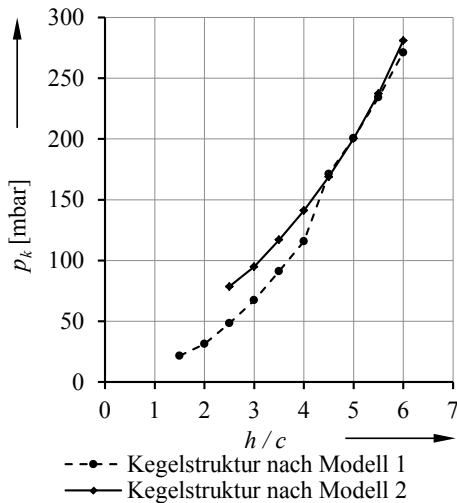


Abbildung 4.20: Verläufe der kritischen Lasten in Abhängigkeit von h/c für berechnete Kegelstrukturen nach Modell 1 und Modell 2

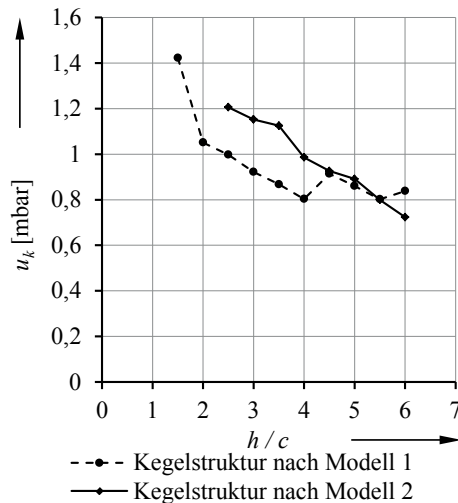


Abbildung 4.21: Verläufe der Verschiebungen an der Spitze im kritischen Punkt in Abhängigkeit von h/c für berechnete Kegelstrukturen nach Modell 1 und Modell 2

Die Kegelstrukturen nach Modell 2 verformen sich im Bereich $2,5 \leq h/c \leq 3,5$ rotationssymmetrisch, Abbildung 4.17 bis Abbildung 4.19. Es ist festzustellen, dass der Beginn

der Durchschlagfähigkeit mit einem höheren Verhältnis für h/c erfolgt als nach Modell 1, siehe dazu Abbildung 4.20.

In Abbildung 4.20 werden die Kurven der kritischen Lasten aus den unterschiedlichen Modellen gegenübergestellt. Die Graphen zeigen, dass die kritischen Lasten an flachen Strukturen, welche mit Modell 2 berechnet werden, geringer sind als die von Strukturen nach Modell 1. Die Kurven nähern sich jedoch mit zunehmendem Verhältnis von h/c an und sind im Bereich von $4,5 \leq h/c \leq 6$ nahezu identisch. Demgegenüber ist jedoch anzumerken, dass die Verformungen nach Modell 2 ab einem Wert von $h/c = 4$ asymmetrisches Verhalten bezüglich der Rotationsachse aufweisen. Siehe dazu exemplarisch Abbildung 4.22 bis Abbildung 4.25 für eine Geometrie mit einem Verhältnis $h/c = 6$.

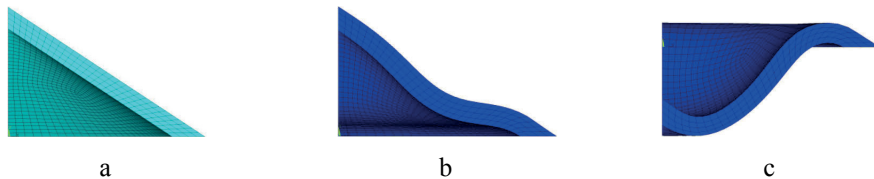


Abbildung 4.22: Unverformte (a) und verformte Kegelstruktur nach Modell 2 mit $h/c = 6$ unmittelbar vor (b) und nach (c) dem Durchschlagen

Die weiteren Analysen der Verschiebungen der Spitze des Kegels ergeben die Kurven in Abbildung 4.21. So zeigt die Abbildung 4.21, dass die Verschiebungen bis zum Durchschlagpunkt von Modell 1 im Bereich von $h/c = 2,5, \dots, 4,5$ geringer sind als die, welche nach Modell 2 berechnet wurden. Die Verschiebungsergebnisse sind ab einem Wert von $h/c = 4,5$ nahezu identisch, bis sie bei $h/c = 6$ wieder auseinanderdriften. Dieser Unterschied ist wieder auf die asymmetrische Verformung des Modells 2 zurückzuführen.

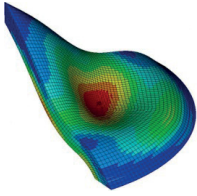


Abbildung 4.23: Spannungsverteilung an einer Kegelstruktur nach Modell 2 mit $h/c = 6$ vor dem Durchschlag

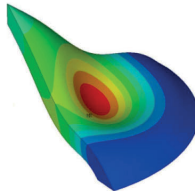


Abbildung 4.24: Beträge der Verschiebungsvektoren bei anliegender kritischer Last an einer Kegelstruktur im Modell 2 mit $h/c = 6$ vor dem Durchschlag

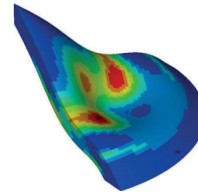
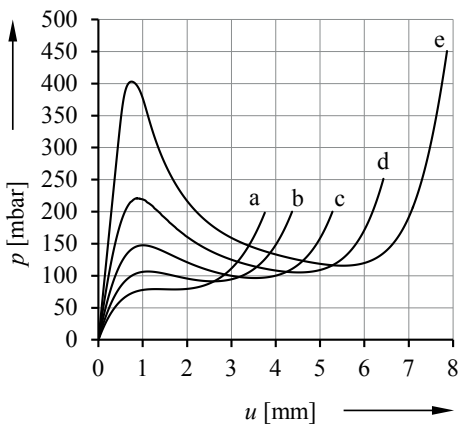


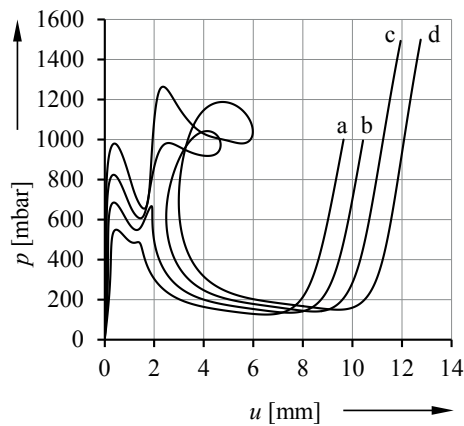
Abbildung 4.25: Darstellung der zusätzlich eingeprägten Stabilisierungsenergie bei anliegender kritischer Last an einer Kegelstruktur im Modell 2 mit $h/c = 6$ vor dem Durchschlag

4.2.3 Parabolische Struktur

In Abbildung 4.26 und Abbildung 4.27 sind die berechneten $p(u)$ -Verläufe für parabolische Strukturen dargestellt. Im Gegensatz zu Kegelstrukturen und sphärische Strukturen weisen parabolische Strukturen nach Modell 1 ab $h/c = 4,5$ eine Multi-Durchschlagcharakteristik auf.



a: $h/c = 1,5$ b: $h/c = 2$ c: $h/c = 2,5$
d: $h/c = 3$ e: $h/c = 3,5$



a: $h/c = 4$ b: $h/c = 4,5$
c: $h/c = 5$ d: $h/c = 5,5$

Abbildung 4.26: Last-Verschiebungs-Verläufe von parabolischen Strukturen mit den geometrischen Verhältnissen $h/c = 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5$

Abbildung 4.27: Last-Verschiebungs-Verläufe von parabolischen Strukturen mit den geometrischen Verhältnissen $h/c = 4, 4,5, 5, 5,5$

Die folgenden Abbildungen zeigen die Ausgangsformen und Verformungen einer parabolischen Struktur für eine Geometrie mit einem Wert für h/c , bei dem das erste Durch-

schlagverhalten für die betrachteten Strukturen auftritt. Zudem ist die Geometrie mit $h/c = 6$ abgebildet (nach Modell 1: Abbildung 4.28 und Abbildung 4.29 und nach Modell 2: Abbildung 4.31 bis Abbildung 4.34).

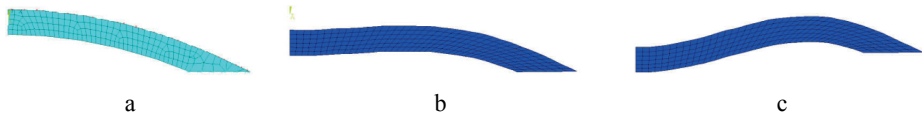


Abbildung 4.28: Unverformte (a) und verformte parabolische Struktur nach Modell 1 mit $h/c = 1,5$ unmittelbar vor (b) und nach (c) dem Durchschlagen.

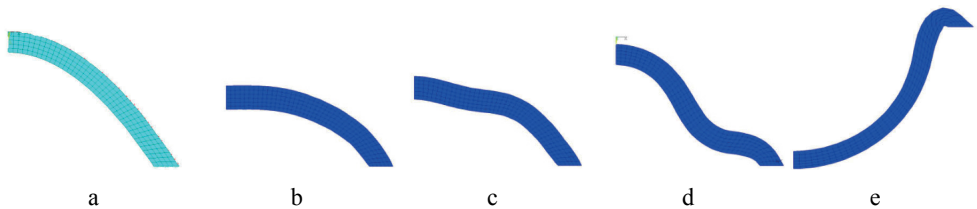


Abbildung 4.29: Unverformte (a) und verformte parabolische Struktur nach Modell 1 mit $h/c = 6$ unmittelbar vor (b) und nach (c) dem lokalen Durchschlag bzw. unmittelbar vor (d) und nach dem (e) globalen Durchschlagen.

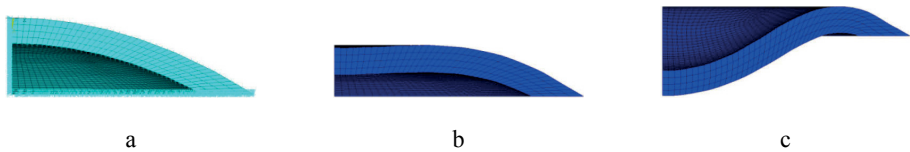


Abbildung 4.30: Parabolische Struktur nach Modell 2 mit $h/c = 2$ im Ausgangszustand (a) und unmittelbar vor (b) und nach (c) dem Durchschlagen

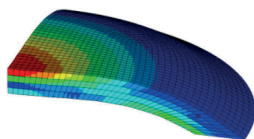


Abbildung 4.31: Spannungsverteilung an einer parabolischen Struktur nach Modell 2 mit $h/c = 2$ vor dem Durchschlag

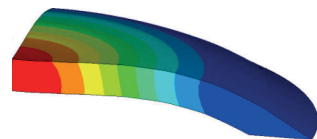


Abbildung 4.32: Beträge der Verschiebungsvektoren bei anliegender kritischer Last an einer parabolischen Struktur nach Modell 2 mit $h/c = 2$ vor dem Durchschlag

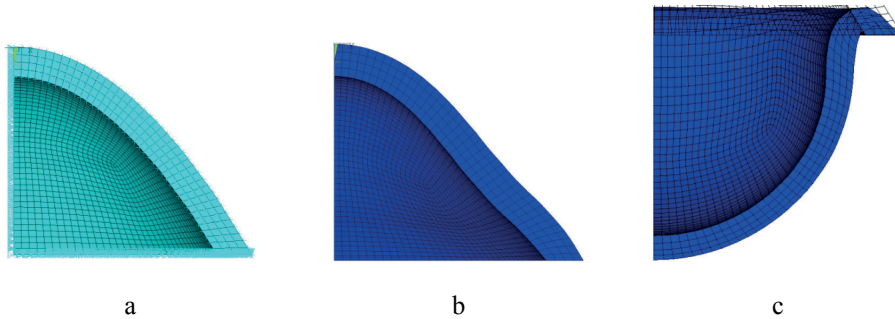


Abbildung 4.33: Parabolische Struktur nach Modell 2 mit $h/c = 6$ im Ausgangszustand (a) und unmittelbar vor (b) und nach (c) dem Durchschlag

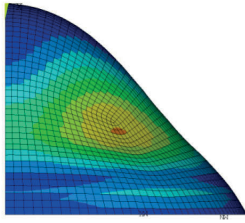


Abbildung 4.34: Spannungsverteilung bei anliegender kritischer Last an einer parabolischen Struktur nach Modell 2 mit $h/c = 6$ vor dem Durchschlag

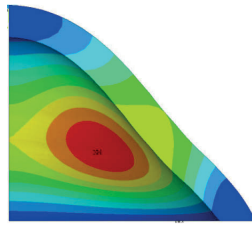


Abbildung 4.35: Summation der vektoriellen Verschiebungsverteilung an einer parabolischen Struktur nach Modell 2 mit $h/c = 6$ vor dem Durchschlag

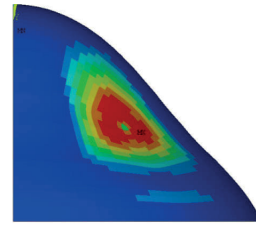


Abbildung 4.36: Darstellung der zusätzlich eingeprägten Stabilisierungsenergie bei anliegender kritischer Last an einer parabolischen Struktur nach Modell 2 mit $h/c = 6$ vor dem Durchschlag

Die Darstellung der Verläufe der kritischen Lasten p_k in Abhängigkeit von h/c zeigen signifikante Unterschiede zwischen Modell 1 und Modell 2. So ist der Graph für Modell 1 ab einem Wert für $h/c = 3$ quasi-linear. Der Graph von Modell 2 zeigt einen Verlauf mit einem Wendepunkt. Die Kurven weisen zu Beginn eine hohe Deckungsgleichheit auf. Ab einem Wert für $h/c = 4$ sind die kritischen Lasten nach Modell 2 jedoch niedriger und die Kurve nimmt einen flacheren Verlauf an als die von Modell 1. Der flachere Verlauf nach Modell 2 ist durch das asymmetrische Verformungsverhalten begründet. Die parabolische Struktur weist ab einem Wert von $h/c \geq 4$ asymmetrische lokale Bereiche auf, in denen ein mechanisches Durchschlagen einsetzt.

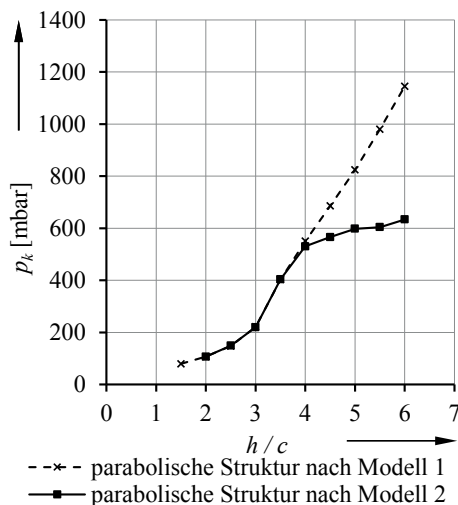


Abbildung 4.37: Verläufe der kritischen Lasten in Abhängigkeit von h/c nach Modell 1 und Modell 2

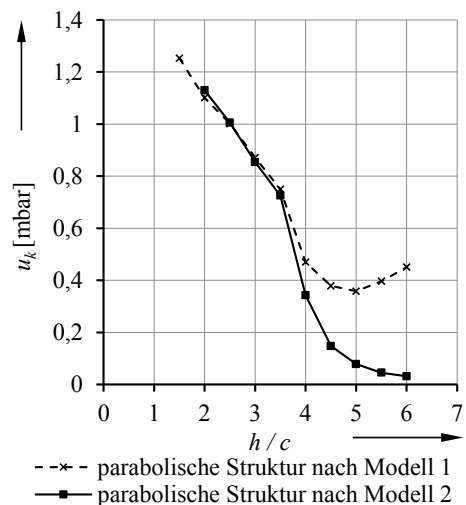


Abbildung 4.38: Verläufe der Verschiebungen im Scheitel des Paraboloids bei anliegender kritischer Last vor dem Durchschlagen in Abhängigkeit von h/c nach Modell 1 und Modell 2

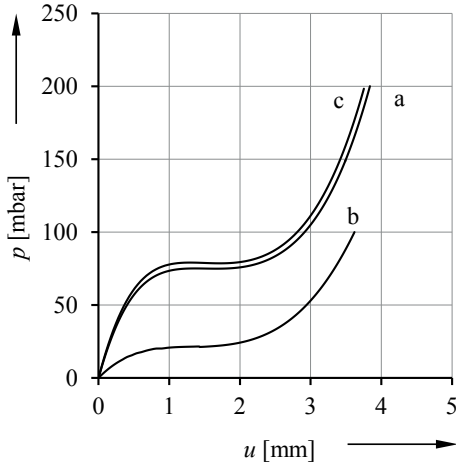
Des Weiteren zeigt sich auch, dass die Verschiebungen des Scheitelpunktes in den unterschiedlichen Modellen ab $h/c = 4$ stark voneinander abweichen. Die Verschiebungen nach Modell 2 sind geringer als die Verschiebungen nach Modell 1, was wiederum durch die niedrigeren kritischen Lasten und das asymmetrische Durchschlagverhalten erklärbar ist.

4.3 Vergleich der Berechnungsergebnisse

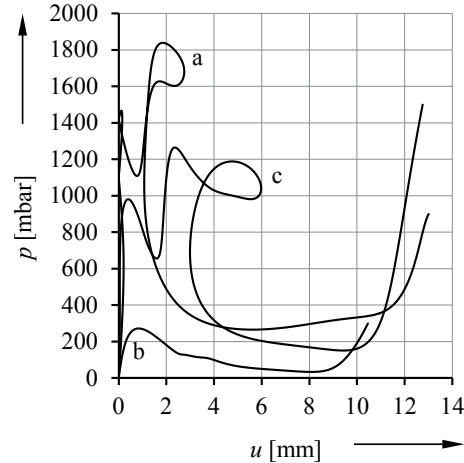
4.3.1 Modell 1

Der direkte Vergleich der verschiedenen untersuchten Rotationskörper zeigt, dass flache sphärische Strukturen und flache parabolische Strukturen ein ähnliches Last-Verschiebungs-Verhalten aufweisen und die kritischen Lasten nahe beieinanderliegen. Demgegenüber ist erkennbar, dass die flachen Kegelstrukturen geringere kritische Lasten ermöglichen, siehe Abbildung 4.39. Hohe Strukturen hingegen weichen in ihrem Last-Verschiebungs-Verhalten stark voneinander ab. So führen selbst hohe Kegelstrukturen zu Last-Verschiebungs-Kennlinien mit Mono-Durchschlagcharakteristik. Sphärische und

parabolische Strukturen weisen stattdessen Kurven mit Multi-Durchschlagcharakteristik auf, Abbildung 4.40.



a: Sphäre, b: Kegelstruktur, c: Paraboloid



a: Sphäre, b: Kegelstruktur, c: Paraboloid

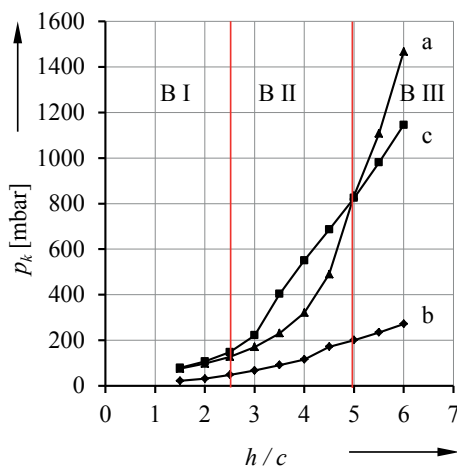
Abbildung 4.39: Last-Verschiebungs-Verläufe der verglichenen Rotationskörper mit $h/c = 1,5$

Abbildung 4.40: Last-Verschiebungs-Verläufe der verglichenen Rotationskörper mit $h/c = 6$

Die Gegenüberstellung der Verläufe der kritischen Lasten in Abhängigkeit vom geometrischen Verhältnis h/c in Abbildung 4.41 zeigt, dass flache sphärische und parabolische Strukturen bis zu einem Wert von $h/c = 2,5$ nahezu identische Durchschlagdrücke aufweisen. Mit Erhöhung von h/c gehen die Verläufe der kritischen Lasten zunächst auseinander und weisen bei $h/c = 5$ einen Schnittpunkt auf. Weiter ist erkennbar, dass die Last-Kurve der parabolischen Strukturen ab $h/c = 3$ einen quasi-linearen Verlauf annimmt. Hingegen ist die Kurve für die Kugelstrukturen zu Beginn gekrümmt und nimmt ab $h/c = 4,5$ ebenfalls einen linearen Verlauf an, welcher jedoch über einen größeren Anstieg verfügt. Die Betrachtung der Kegelstrukturen zeigt über das gesamte Spektrum niedrigere kritische Lasten als die beiden anderen Rotationskörper. In Abbildung 4.42 sind die Verschiebungen im Scheitelpunkt bei anliegender kritischer Last dargestellt. Im Bereich von $1,5 \leq h/c \leq 4,5$ verlaufen die Kurven nahezu parallel. Darüber hinaus führen Kegelstrukturen zu größeren Verschiebungen als die beiden gekrümmten Strukturen, wobei die sphärischen Strukturen ab $h/c = 5$ die geringsten Verschiebungen aufweisen. Diese sphärischen Strukturen verfügen über die höchste Steifigkeit unter den untersuchten Rotationskörpern.

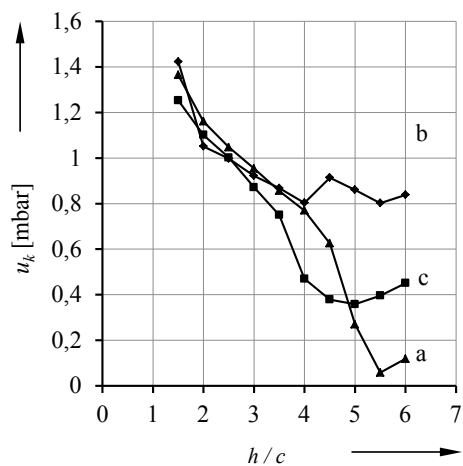
Zusammenfassend kann die Darstellung der Verläufe in drei Bereiche eingeteilt werden, siehe Abbildung 4.41. Im ersten Bereich B I zeigen sphärische und parabolische Strukturen nahezu identisches Verhalten. Die Geometrie der Rotationskörper ist ähnlich. So ist der Unterschied des Radius des Horizontalkreises einer sphärischen Struktur im Vergleich zu dem einer parabolischen Struktur bis zu einem Wert von $h/c = 4$ klein, siehe Abbildung 4.43. Demgegenüber wächst der Horizontalkreisradius einer Kegelstruktur mit Erhöhung von h/c .

Im Bereich B II kommt der Einfluss der Krümmungsform zum Tragen. Sphärische Strukturen mit geometrischen Parametern, die in B II liegen, lassen geringere kritische Lasten zu als eine parabolische Struktur. Dieses Verhalten kehrt sich im dritten Bereich B III um, und die sphärischen Strukturen sind steifer als die parabolischen.



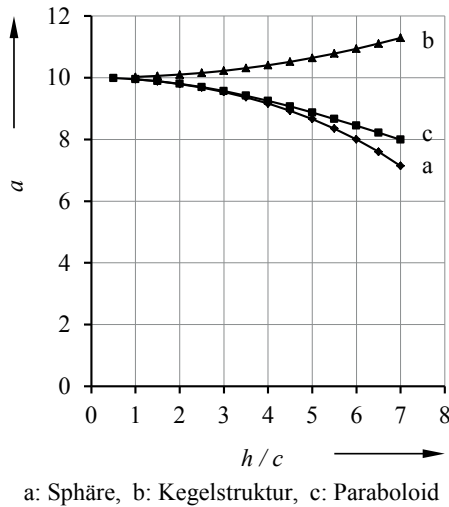
a: Sphäre, b: Kegelstruktur, c: Paraboloid

Abbildung 4.41: Verläufe der kritischen Lasten p_k der untersuchten Strukturen in Abhängigkeit vom geometrischen Verhältnis h/c



a: Sphäre, b: Kegelstruktur, c: Paraboloid

Abbildung 4.42: Verläufe der kritischen Verschiebungen u_k der untersuchten Strukturen in Abhängigkeit vom geometrischen Verhältnis h/c



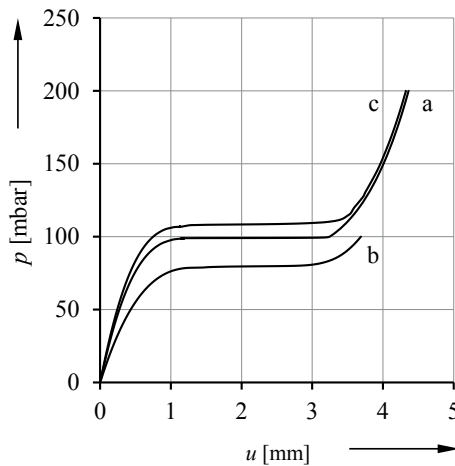
a: Sphäre, b: Kegelstruktur, c: Paraboloid

Abbildung 4.43: Verlauf des Radius des Horizontalkreises a in Abhängigkeit von h/c für die untersuchten Rotationskörper.

4.3.2 Modell 2

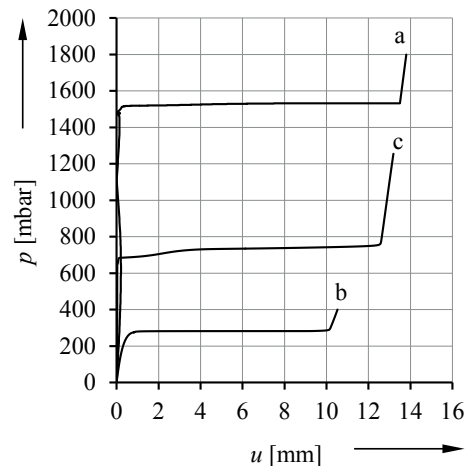
Die Gegenüberstellung der Berechnungen nach Modell 2 zeigt ein ähnliches Bild wie der vorangegangene Vergleich. Die kritischen Lasten der flachen sphärischen Strukturen und flachen parabolischen Strukturen weisen bis $h/c = 3$ nur geringe Unterschiede auf, siehe Abbildung 4.41. Aufgrund der auftretenden asymmetrischen Verformung, siehe Abschnitt 4.2.3, verläuft die Last-Kurve der parabolischen Strukturen erkennbar flacher als die der sphärischen Strukturen. Im Abschnitt 4.2.3 konnten die Gründe dafür bereits gezeigt werden. Der Verlauf der kritischen Lasten an Kegelstrukturen ist, wie schon bei der Betrachtung nach Modell 1, deutlich flacher und zeigt, dass Kegelstrukturen geringere Durchschlaglasten als die beiden anderen Strukturen zulassen.

Die Bereiche B I und B II charakterisieren das Gleiche wie im vorangegangenen Abschnitt. Sphärische und parabolische Strukturen zeigen auch hier sehr starke Ähnlichkeiten, siehe auch Abbildung 4.44. Im dritten Bereich B III ist auch wieder zu erkennen, dass sphärische Strukturen ab $h/c > 4$ steifer sind als parabolische. Der Unterschied in den kritischen Lasten ist jedoch höher als der Unterschied im Vergleich nach Modell 1, was auf die asymmetrische Verformung der parabolischen Strukturen zurückzuführen ist.



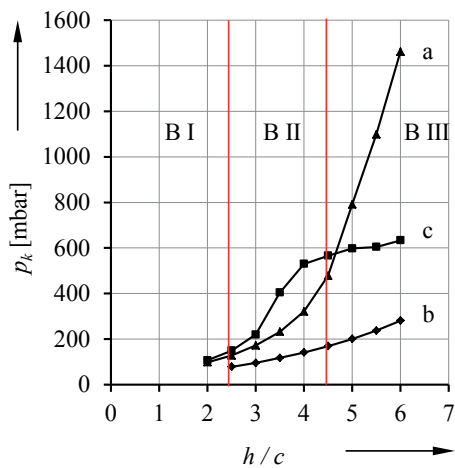
a: Sphäre, b: Kegelstruktur, c: Paraboloid

Abbildung 4.44: Last-Verschiebungs-Verläufe der verglichenen Strukturen mit $h/c = 2$ bzw. 2,5



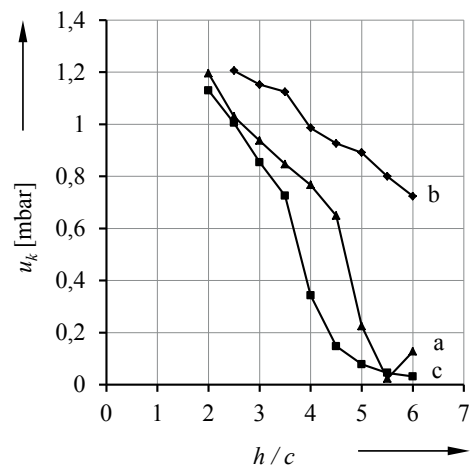
a: Sphäre, b: Kegelstruktur, c: Paraboloid

Abbildung 4.45: Last-Verschiebungs-Verläufe der verglichenen Strukturen mit $h/c = 6$



a: Sphäre, b: Kegelstruktur, c: Paraboloid

Abbildung 4.46: Verläufe der kritischen Lasten p_k der Strukturen in Abhängigkeit vom geometrischen Verhältnis h/c



a: Sphäre, b: Kegelstruktur, c: Paraboloid

Abbildung 4.47: Verläufe der kritischen Verschiebungen u_k der Strukturen in Abhängigkeit vom geometrischen Verhältnis h/c

4.4 Zusammenfassung

Im vorliegenden Kapitel wurden Rotationskörper mit unterschiedlicher Meridianform auf ihr Durchschlagverhalten hin untersucht und verglichen. Der Vergleich zeigt, dass flache sphärische Strukturen und flache parabolische Strukturen ein ähnliches Durchschlag- und Verformungsverhalten aufweisen, siehe Abbildung 4.41 und Abbildung 4.46. Das Verhalten der untersuchten Geometrien ändert sich jedoch mit Erhöhung von h/c unterschiedlich stark und zeigt, dass hohe sphärische Strukturen mit $h/c = 5, \dots, 6$ steifer sind als vergleichbare parabolische Strukturen und Kegelstrukturen. Solche sphärischen Strukturen führen zu höheren Durchschlaglasten als parabolische Strukturen und Kegelstrukturen. Demgegenüber sind Kegelstrukturen im Wesentlichen nachgiebiger und weniger steif als die beiden anderen untersuchten Strukturen, was wiederum zu niedrigeren Durchschlaglasten führt. Weiterhin zeigen die untersuchten Kegelstrukturen keine Multi-Durchschlagcharakteristik im Last-Verschiebungs-Verlauf.

Die Gegenüberstellung der $p_k(h/c)$ – Verläufe von sphärischen und parabolischen Strukturen kann in drei Bereiche eingeteilt werden, Abbildung 4.41 und Abbildung 4.46. Die Einteilungen zeigen nur im Bereich B III signifikante Unterschiede beim Vergleich der Berechnungsmodelle Modell 1 und Modell 2. Strukturen mit Werten für die geometrischen Parameter, die in die Bereiche B I und B II fallen, können mit Modell 1 berechnet werden, da keine asymmetrische Verformung auftritt. Demgegenüber müssen parabolische Strukturen, deren Parameter in B III liegen mit Modell 2 berechnet werden, da asymmetrisches Verformungsverhalten vorliegt.

Aus praktischer Sicht zeigt sich, dass parabolische Strukturen im Bereich B II steifer sind als sphärische Strukturen bei gleicher Höhe. Im Bereich B III ist das Verhalten umgekehrt. Damit kann je nach Anwendungsfall entschieden werden, welche Form des Meridians sinnvoll ist, um eine möglichst hohe bzw. niedrige kritische Last zu erzielen und dabei gleichzeitig eine entweder möglichst niedrige oder möglichst hohe Bauform zu erreichen.

5 Experimentelle Verifikation der FEM-Untersuchungen von sphärischen Strukturen

In diesem Kapitel werden die FEM-Ergebnisse aus Kapitel 3 mithilfe messtechnischer Experimente überprüft. Das Ziel der Messungen ist die Ermittlung des Druck-Verschiebungs-Zusammenhangs im Scheitelpunkt ausgewählter Strukturen, um den Vergleich mit den FEM-Ergebnissen zu ermöglichen. Ein weiteres Ziel der Experimente ist die Untersuchung des Verformungsverhaltens der gesamten Strukturen während des Durchschlagvorganges. Dazu werden die Verformungen mit einer Hochgeschwindigkeitskamera aufgenommen und visualisiert.

5.1 Messung des kritischen Druckes und der Verschiebung im Scheitelpunkt

5.1.1 Aufbau des Messstandes

Für die Ermittlung des kritischen Druckes am Versuchsobjekt wird ein Versuchsstand aufgebaut, der über eine Druckregelung (3), ein Laserwegmesssystem (6) und eine Drucksensorik (2) verfügt, siehe Abbildung 5.1 und Abbildung 5.4.

Weiterhin wird eine Druckkammer (4) eingesetzt, in welche der Prüfling (5) eingespannt wird, siehe Abbildung 5.2. Diese Druckkammer ermöglicht es, einen gleichmäßigen Druck auf die äußere Wölbung des Prüflings aufzubringen. Die Einspannvorrichtung ist so ausgelegt, dass das zu prüfende Objekt ohne Beeinflussung der Verformung einen mechanischen Durchschlag vollziehen kann. Dazu wird die halbkugelförmige sphärische Struktur (der Prüfling) auf einen Hohlzylinder gespannt, der mit einer kreisförmigen Trägerplatte verbunden ist, siehe Abbildung 5.3. Weiterhin muss gewährleistet werden, dass der Durchschlagvorgang keinen Überdruck im Inneren des Hohlzylinders erzeugt. Denn wenn der Hohlzylinder geschlossen wäre, würde der durchschlagende Körper das Volumen des Hohlzylinders sprunghaft verringern und der Druck in dem Hohlzylinder ansteigen. Der steigende Druck im Hohlzylinder wirkt wiederum auf den Prüfling.

Eine solche Druckerhöhung kann somit das Messergebnis entscheidend beeinflussen und verfälschen. Es muss also gewährleistet sein, dass ein offenes Ende des Hohlzylinders vollständig freiliegt.

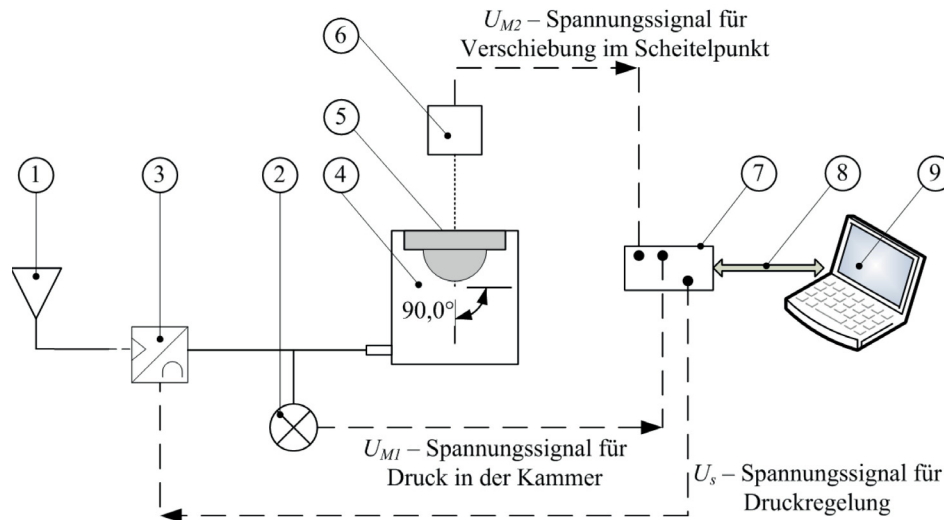


Abbildung 5.1: Schematischer Aufbau des Versuchsstandes zur Ermittlung des kritischen Druckes – 1. Druckversorgung, 2. Drucksensor, 3. softwaregesteuerter Druckregler, 4. Druckkammer, 5. Prüfling, 6. Lasermesssystem, 7. BNC-Anschlussblock, 8. Gesamtdatenübertragung, 9. PC mit DAQ2026-Daten-erfassungskarte

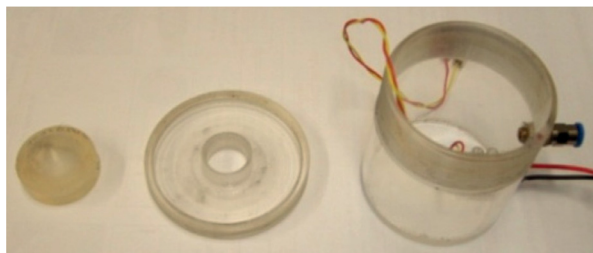


Abbildung 5.2: v.l.n.r.: sphärische Struktur aus Silikon, kreisförmige Trägerplatte, Druckkammer für Luftdruckbelastung auf die Silikonkappe



Abbildung 5.3: Sphärische Struktur aus Silikon auf Träger

Zur Bereitstellung eines gleichmäßig ansteigenden Luftdruckes wird ein Proportionaldruckregelventil (3) der Firma Festo eingesetzt [Festo AG & Co. KG 2008]. Dieses Ventil ermöglicht eine softwaregesteuerte Regelung des Druckes mithilfe des Programmsystems LabView 8.5. Dadurch kann ein Maximalwert, der zeitliche Anstieg und der anschließende Abfall des Luftdruckes geregelt werden. Somit ist durch geeignete Einstellung der Pa-

rameter eine quasistatische Belastung bis zum Erreichen des kritischen Druckes (langsame Drucksteigerung in der Druckkammer) realisierbar, was wiederum das Lastverhalten aus den Berechnungen bis zur kritischen Last in guter Näherung nachbildet. Die anliegenden Drücke, welche als Referenz für die Regelung notwendig sind, werden mit Drucksensoren (2) gemessen und über die Datenerfassung wieder als Regelparameter bereitgestellt. Das Proportionaldruckregelventil verfügen über eine Auflösung von 10 mbar und einer Genauigkeit von $\pm 0,5 \%$ des Messwertes.

Parallel zur Ermittlung der kritischen Drücke wird die vertikale Verschiebung im Scheitelpunkt der sphärischen Struktur mithilfe eines Laser-Triangulations-Messsystems (6) ermittelt [Micro-Epsilon Messtechnik GmbH & CO. KG 2007]. Das eingesetzte Messsystem verfügt über eine Wegauflösung von $6 \mu\text{m}$ und einer Genauigkeit von $\pm 0,2 \%$ des Messwertes, einer maximalen Abtastrate von 10 kHz und einem Messbereich von 20 mm. Der Sensor ermöglicht somit eine Bestimmung der auftretenden Verschiebung im Messpunkt. Der Laserstrahl wird annähernd senkrecht auf den Scheitelpunkt der zu prüfenden sphärischen Struktur ausgerichtet, siehe Abbildung 5.5. Hierbei ist jedoch der quantitative Wert der Verschiebung zweitrangig. Die Verschiebung des Scheitelpunktes dient in erster Linie als Indikator zur Detektion einer sprunghaften Verformung des Prüfkörpers.

Die Wirkungsweise des Lasermesssystems beruht auf dem Prinzip der Triangulation. Triangulation bedeutet Abstandsmessung durch Winkelberechnung. Bei der Messung wird ein Laserpunkt auf das Messobjekt projiziert. Der reflektierte Strahl trifft abhängig von der zu messenden Entfernung unter einem bestimmten Winkel auf ein Sensorelement. Durch die Position des Laserstrahlpunktes auf dem Sensorelement und aus der Distanz von Sender zum Sensor-element wird der Abstand zum Messobjekt im Sensor berechnet [Micro-Epsilon Messtechnik GmbH & CO. KG 2007].

Während der Messung wird am Druckregler, ausgehend von einem Relativdruck von 0 mbar, eine schrittweise Erhöhung des pneumatischen Druckes bis 550 mbar bei einer Schrittweite von 10 mbar und einer Wartezeit zwischen den Schritten von 50 ms durchgeführt. Wenn der maximale Druck erreicht ist, erfolgt eine schrittweise Verringerung des Druckes mit den soeben genannten Schrittparametern bis auf 0 mbar. Die Erhöhung und Verringerung des anliegenden Druckes dienen der Ermittlung des sogenannten oberen kritischen Druckes bei Belastung und des unteren kritischen Druckes

bei Entlastung. Während der Messung wird eine Abtastrate am Laser von 500 Hz eingestellt, um den Durchschlagvorgang mit einer ausreichenden Auflösung zu erfassen. Des Weiteren werden Probekörper mit einem Öffnungsradius $r = 10$ mm, einer Wandstärke $c = 1$ mm und einer Höhe $h = 2, \dots, 10$ mm (Schrittweite 1 mm) geprüft.

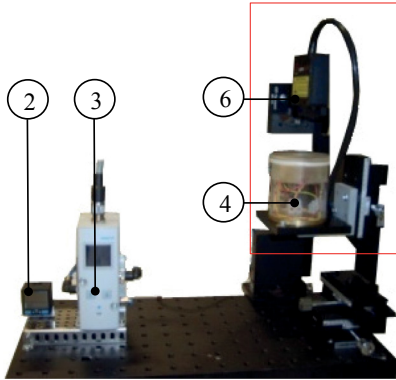


Abbildung 5.4: Messaufbau für Druckprüfung

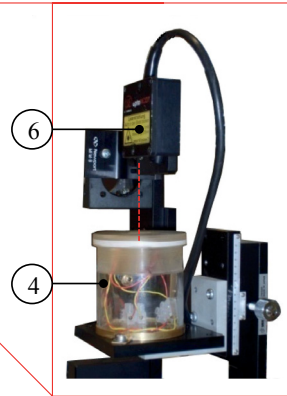


Abbildung 5.5: Lasertriangulationssystem senkrecht über der Rundkammer

5.1.2 Messergebnisse

Die Abbildung 5.6 und Abbildung 5.7 zeigen auszugsweise den Druck-Zeit-Verlauf und den daraus resultierenden Druck-Verschiebungs-Verlauf im Scheitelpunkt der sphärischen Referenzstruktur. Die dargestellte Kurve entspricht der aufgetragenen Druckbelastung. Wie in Abbildung 5.6 zu erkennen ist, wird der Druck linear gesteigert bis auf einen Wert von 550 mbar. Anschließend wird der Druck wieder linear verringert. Im Anfangs- und Endbereich der Kurve sind lokale Maxima zu erkennen. Diese sind auf den Druckregler zurückzuführen, da der Regler eine untere, nicht beeinflussbare Druckschwelle besitzt, ab welcher das Gerät mit der Regelung beginnt. Im weiteren Verlauf ist bei einem Zeitwert von etwa 185 mbar eine signifikante Störung zu beobachten. Diese Störung erfolgt aus zeitlicher Sicht parallel zum Durchschlag der sphärischen Struktur. Das bedeutet, dass der Durchschlag des Prüflings eine messbare Druckänderung in der Kammer zur Folge hat.

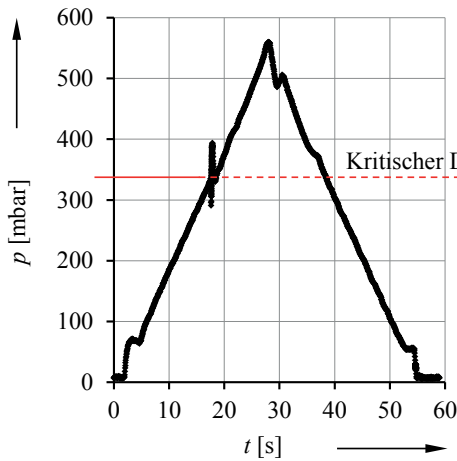


Abbildung 5.6: Last-Zeit-Verlauf für die Prüfung einer sphärischen Struktur mit einer Höhe $h = 10$ mm

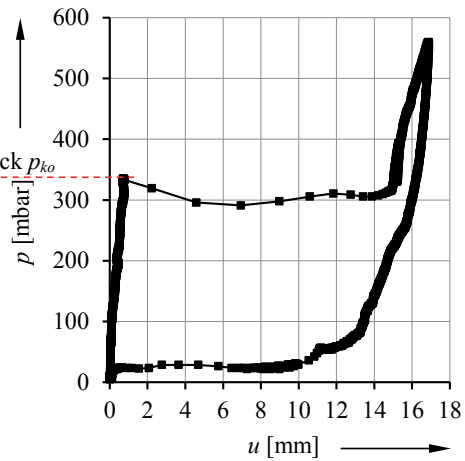


Abbildung 5.7: Last-Verschiebungs-Verlauf für den Scheitelpunkt einer sphärischen Struktur mit einer Höhe $h = 10$ mm

Der Regler registriert den Druckabfall und regelt den Druck wieder auf seinen Sollwert, woraus der folgende charakteristische Druckanstieg resultiert. Nachdem der Durchschlagvorgang abgeschlossen ist, bleibt das Volumen annähernd konstant und die Lastkurve steigt weiter kontinuierlich an. Die Last-Verschiebungs-Kurve, Abbildung 5.7, zeigt in Analogie zu dem beschriebenen Durchschlag eine sprunghafte Verschiebung, die ab einem Druck von ca. 330 mbar beginnt. Diese Lageänderung des Scheitelpunktes stellt den Vorgang des mechanischen Durchschlages dar. Der Verlauf der Kurve lässt zudem im Bereich $1 \text{ mm} \leq u \leq 15 \text{ mm}$ eine Abnahme des Druckes während des Durchschlagvorganges erkennen. Aufgrund des Durchschlages verändert sich das Volumen. Dies führt dazu, dass eine Druckänderung auftritt. Der Druckregler regelt den Druck nach, um den gewünschten Maximalwert zu erreichen, wodurch die Druckänderung nicht so ausgeprägt erfolgt, wie sie theoretisch unter der Annahme eines statischen Verhaltens ermittelt wurde.

Für die Interpretation und Auswertung der Messungen werden fünf Probekörper zu jeder genannten Geometrie fünfmal gemessen. Während der Messungen werden die kritischen Drücke bestimmt. Aus den Messwerten zu jeder Messreihe werden die Mittelwerte und Standardabweichungen ermittelt.

Daraus wiederum werden die Standardmessunsicherheiten berechnet und im Diagramm mit den Mittelwerten abgetragen.

Im Folgenden soll in Anlehnungen an die Ausführungen zur Bestimmung von Messunsicherheiten in Bell 2001 die statistische Messunsicherheit mit der zufälligen Messunsicherheit kombiniert werden. Hierbei ist die statistische Messunsicherheit, auch „Typ A“ nach GUM, die Unsicherheit die mit den Methoden der Statistik aus einer Messreihe unter der Nutzung von Gleichungen (5.1) bis (5.2) ermittelt wird. Die zufällige Messunsicherheit, auch „Typ B“ nach GUM, wird mit anderen als mit statistischen Mitteln bestimmt. Beispiele dafür sind Informationen über Unsicherheiten aus Kalibrierzertifikaten oder aus Angaben vom Hersteller über Ungenauigkeiten des Messgerätes [Heckenkamp 2007].

$$s_{SA} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (w_i - \bar{w})^2} \quad (5.1)$$

$$u_{MU} = \frac{s_{SA}}{\sqrt{n}} \quad (5.2)$$

$$u_{kombi} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 \dots etc} \quad a, b, c \hat{=} \text{Quelle der Unsicherheit} \quad (5.3)$$

Abschließend werden die verschiedenen Quellen für Messunsicherheiten und ihre Quantifizierung aufgelistet und zu einer Gesamtmessunsicherheit u_{kompi} zusammengeführt, siehe Tabelle 5.1. In Tabelle 5.1 sind die beschriebenen Quellen für Messunsicherheiten beispielhaft für die Messergebnisse der sphärischen Referenzstruktur aufgelistet. Der angegebene Überdeckungsbereich beruht auf der berechneten Gesamtmessunsicherheit u_{kombi} und wird mit einem Überdeckungsfaktor $k = 2$ multipliziert, was wiederum bedeutet, dass ca. 95 % der Messwerte im Intervall $\pm 2u_{kombi}$ liegen.

Tabelle 5.1: Quellen für Messunsicherheiten und deren Einflussgrößen

Quelle der Unsicherheit	Wert	Wahrscheinlichkeitsverteilung	Teiler	Standardunsicherheit
Kalibrierunsicherheit des Druckreglers mit 0,5 %	1,6106 mbar	Normal	2	0,8053 mbar
Auflösung	10 mbar	Gleich	$\sqrt{3}$	5,77 mbar
Standardmessunsicherheit u_{MU} nach fünf Messungen	33,75 mbar	Normal	1	33,75 mbar
Kombinierte Standardmessunsicherheit u_{kombi}		Normal	1	34,25 mbar
Überdeckungsbereich		Normal (Überdeckungsgrad $k = 2$)		68,5 mbar

In Abbildung 5.8 sind die kritischen Drücke aus den Berechnungen und Messungen gegenübergestellt. Es ist zu erkennen, dass sich die kritischen Drücke von Modell 1 und Modell 2 unterscheiden, so wie es bereits in Kapitel 3 gezeigt wurde. Zudem weichen die gemessenen Durchschlagdrücke einzelner sphärischer Strukturen von den Berechnungsergebnissen ab. Eine ausführliche Begründung zu den auftretenden Abweichungen erfolgt in Abschnitt 5.3, daher wird an dieser Stelle zunächst nicht näher auf die Unterschiede eingegangen.

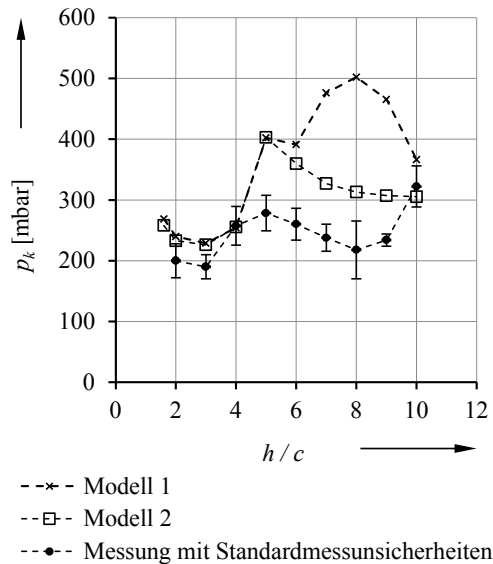


Abbildung 5.8: Gegenüberstellung der kritischen Drücke von berechneten und messtechnisch ermittelten Ergebnissen in Abhängigkeit von h/c

5.2 Visualisierung des Verformungsverhaltens von sphärischen Strukturen unter Druckbelastung

5.2.1 Aufbau des Messstandes

Um das Verformungsverhalten einer gesamten sphärischen Struktur experimentell zu untersuchen und mit den Berechnungsergebnissen zu vergleichen, werden Prüflinge mit einem pneumatischen Druck belastet, die Verformung mit einer Kamera verfolgt und aufgenommen. Da der Durchschlagvorgang ein hochdynamischer Prozess ist, der im Bereich weniger Millisekunden (ca. 4 - 6 ms) abläuft, kann dieser mit dem menschlichen Auge nicht erfasst werden. Aus diesem Grund wird eine Hochgeschwindigkeitskamera zur Visualisierung der Verformungen der sphärischen Strukturen eingesetzt. Die verwendete Kamera ist ein System der Firma Photron [Photron 2008]. Die Aufnahmen wurden mit einer Auflösung von 640 x 640 Pixel, einer Bildrate von 7000 fps und einer Farbtiefe von 8 Bit / monochrom durchgeführt.

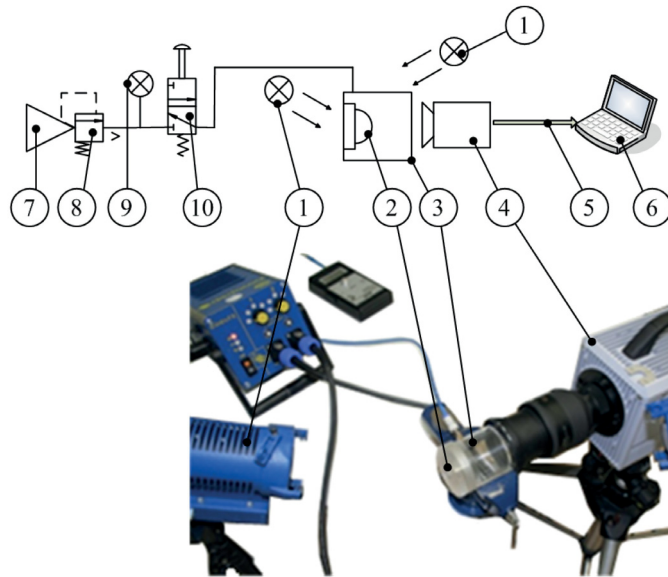


Abbildung 5.9: Aufbau des Messstandes zur Ermittlung der Verformung mithilfe einer Hochgeschwindigkeitskamera – 1. Beleuchtung, 2. Prüfling, 3. Kammer, 4. Kamera, 5. Datenleitung, 6. PC mit DAQ2026-Daten-erfassungskarte, 7. Druckluftversorgung, 8. Handdruckregler, 9. Drucksensor, 10. 3/2-Wegeventil mit Handbetätigung und Federrückstellung

5.2.2 Ergebnisse der Hochgeschwindigkeitsaufnahmen

Die Auswertung der Aufnahmen ergibt die folgende Bilderreihe, welche den Durchschlagvorgang zeigt und in ähnlicher Weise für die untersuchten sphärischen Strukturen auftritt. Die Bilderreihe in Abbildung 5.10 zeigt das Durchschlagverhalten einer sphärischen Struktur mit einem Öffnungsradius $r = 10$ mm, mit einer Höhe $h = 10$ mm und einer Wandstärke $c = 1$ mm.

Es ist zu erkennen, dass die betrachteten sphärischen Strukturen ein asymmetrisches Verformungsverhalten aufweisen. Der Verformungsprozess ist bereits im ersten Bild (Bild 1) der Reihe zuerkennen (im roten Kreis), wobei die Verformungen noch gering ausgeprägt sind. Im letzten Bild der ersten Zeile (Bild 6) ist eine leichte asymmetrische Verformung linksseitig der schwarzen Markierung erkennbar. Auf den Bildern 11 und 12 ist die Verformung deutlich ersichtlich. Die Verformung dehnt sich weiter nach rechts aus (Bild 13 bis 18 und erkennbar durch die Verschiebung der schwarzen Markierung). Im Bild 32 ist der Durchschlagvorgang beendet.

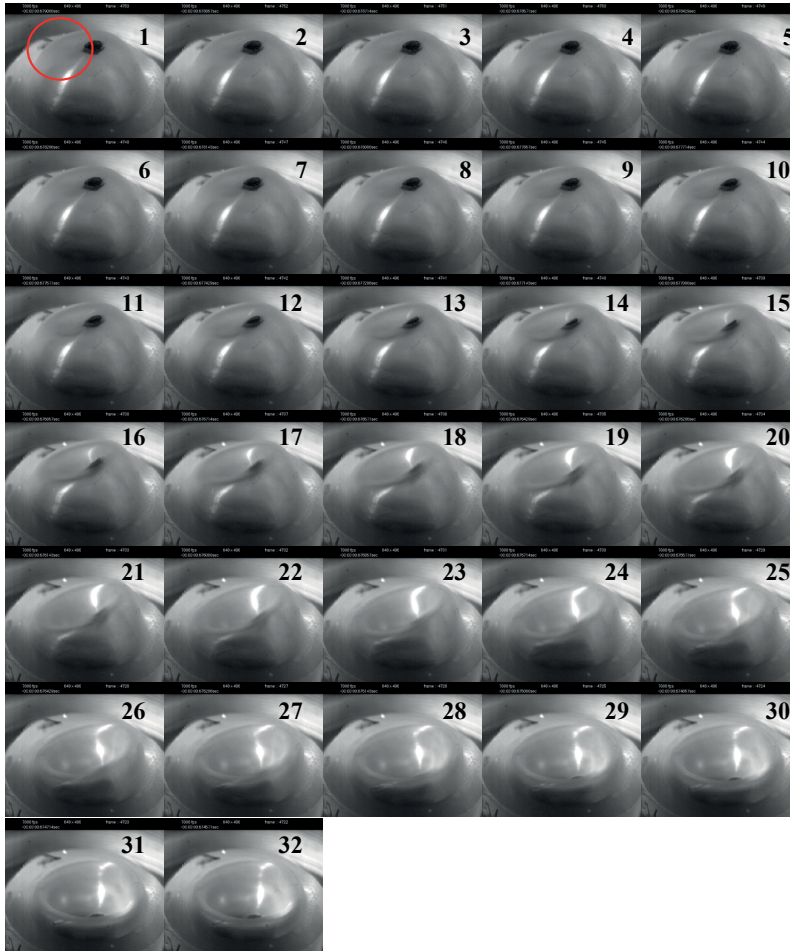


Abbildung 5.10: Bilderreihe zur Darstellung des Durchschlagvorganges einer Halbkugel mit $r = 10 \text{ mm}$, $h = 10 \text{ mm}$ und $c = 1 \text{ mm}$

Alle untersuchten Prüflinge zeigen ein ähnliches Verhalten wie Abbildung 5.10. Die Verformung beginnt stark dezentral, seitlich, außerhalb des Kugelscheitels und verstärkt sich im Verlauf des Vorganges. Es erfolgt ein asymmetrisches Durchschlagen der Strukturen. Seitliche lokale Beulen konnten nicht beobachtet werden.

5.3 Ergebnisdiskussion

Die messtechnischen Untersuchungen zeigen, dass sich die Berechnungsergebnisse zum Teil von den real ermittelten unterscheiden, siehe Abbildung 5.8. Für diese Abweichungen gibt es verschiedene Gründe. Sie können z. B. durch den Herstellungsprozess, die

Materialeigenschaften und die ermittelten Materialdaten für die Berechnung, durch das Messverfahren und den Messunsicherheiten der verwendeten Apparaturen oder auch durch das Presswerkzeug hervorgerufen werden.

Die Abweichungen können auch auf strukturelle Imperfektionen der untersuchten sphärischen Strukturen zurückzuführen sein. Im Rahmen der Fehlerbetrachtung wird auch das Presswerkzeug auf seine geometrische Maßhaltigkeit und Fertigungstoleranzen untersucht, da das Werkzeug die tatsächliche Form der Prüflinge bestimmt. Das Werkzeug wurde mit einer Drehmaschine im Fachgebiet Fertigungstechnik der TU Ilmenau hergestellt. Bei der Fertigung sollte eine Toleranz von $\pm 0,1$ mm eingehalten werden. Der genutzte Herstellungsprozess ist so festgeschrieben, dass eine praktische Fehlerbehebung mithilfe des Herstellungsprozesses nur bedingt oder nicht zu realisieren ist.

Eine mögliche Fehlerquelle beim Herstellungsprozess ist die Wärme- und Druckverteilung im Presswerkzeug. Um eine homogene Verteilung des Materials im Werkzeug zu sichern, muss eine gleichmäßige Wärme- und Druckverteilung gewährleistet sein. Zudem muss die geforderte Vulkanisationstemperatur bereitstehen. Das Material wird jedoch bei Raumtemperatur in das Werkzeug gefüllt und zum Teil verschlossen. Anschließend wird das Presswerkzeug in eine Presse mit zwei Heizelementen gestellt und zusammengepresst. Der Nachteil dieser Methode ist, dass das noch kalte Material durch den Pressvorgang bereits in Form gebracht wird, ohne dass es sich infolge der Erwärmung ausreichend verflüssigen kann. Der Temperaturanstieg im Inneren des Werkzeuges erfolgt verzögert trotz des Einsatzes von Aluminium, welches über eine sehr gute Wärmeleitung verfügt. Dadurch entsteht ein Temperaturgradient von der Werkzeugwand in das Innere der Silikonmasse, und dieser führt zu einer unerwünscht ungleichmäßigen Vulkanisation. Die mögliche auftretende Inhomogenität des ausvulkanisierten Materials kann Abweichungen des realen Verhaltens im Vergleich zur Berechnung zur Folge haben [siehe dazu auch Gohl 1991]. Die Materialeigenschaften, welche für die Berechnungen genutzt wurden, beruhen auf einem uniaxialen Zugversuch. Es ist also möglich, dass die ermittelten Materialparameter das genutzte Silikon nicht ausreichend beschreiben, obwohl die Berechnung zum uniaxialen Zugversuch eine vergleichbare Spannungs-Dehnungs-Kurve zum realen Versuch ergibt. Da jedoch die Verformung nicht einem rein uniaxialen Spannungszustand entspricht, sind die genutzten Materialparameter eine mögliche Fehlerquelle. Um den

Fehler durch die Materialparameter zu minimieren, können die Parameter in weiterführenden Arbeiten mit der Hilfe von vier verschiedenen Prüfverfahren (uniaxialer Zugversuch, biaxialer Zugversuch, Scherversuch, Kompressionsversuch) ermittelt werden.

Zur weiteren qualitativen Bestimmung von Fehlerquellen werden die genutzten Presswerkzeuge mithilfe eines 3D-Koordinatenmessgerätes der Firma Zeiss überprüft [Carl Zeiss Industrielle Messtechnik GmbH 2009].



Abbildung 5.11: Presswerkzeug für Strukturen mit $r = 10$ mm, $h = 10$ mm und $c = 1$ mm

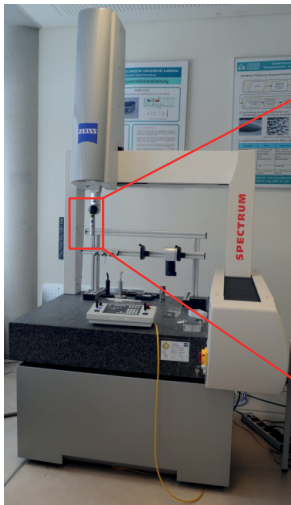


Abbildung 5.12: Koordinatenmessgerät der Firma Zeiss für die Bestimmung der geometrischen Größen des verwendeten Presswerkzeuges



Abbildung 5.13: Tastsystem des Koordinatenmessgerätes

Dieses Gerät erlaubt die Ermittlung der tatsächlichen Kontur und die Bestimmung der Abweichungen vom idealen CAD-Modell. Dabei wird die Werkstückoberfläche punktweise mit einem mechanischen Kugeltaster vermessen. 3D-Koordinatenmessgeräte (KMG) können für verschiedenste Messaufgaben eingesetzt werden. Sie werden zur Be-

stimmung von Formeigenschaften wie zum Beispiel die Geradheit, Ebenheit, Rundheit oder Zylinderform genutzt. Zusätzlich werden Angaben über die Lage wie zum Beispiel die Richtung (Parallelität, Rechtwinkligkeit und Neigung), den Ort (Position und Symmetrie) und den Lauf (Plan- und Rundlauf) ermittelt. Mit KMG wird auch die Feingestalt wie Welligkeit und Rauheit beurteilt [Dutschke 2005].

Für die Messung wird das Presswerkzeug, Abbildung 5.11, in das Messgerät, Abbildung 5.12 und Abbildung 5.13, eingespannt und über ein taktils Messverfahren in vorgegebener Messstrategie gescannt. Dabei wird die Oberfläche des Messobjektes punktuell abgetastet. Die somit ermittelten Koordinaten werden in geometrische Primitive umgewandelt und mit einem zugrunde gelegten CAD-Modell, welches ebenfalls in geometrische Primitive zerlegt wird, verglichen. Bei der Messung wird der Schwerpunkt auf die Ermittlung der Konturen für die sphärische Struktur gelegt, weil diese Konturen maßgebend für das Durchschlagverhalten der Prüflinge sind.

Im Folgenden wird auszugsweise das Ergebnis einer Messung beschrieben, da die Messergebnisse aller Presswerkzeuge Ähnlichkeit zueinander zeigen.

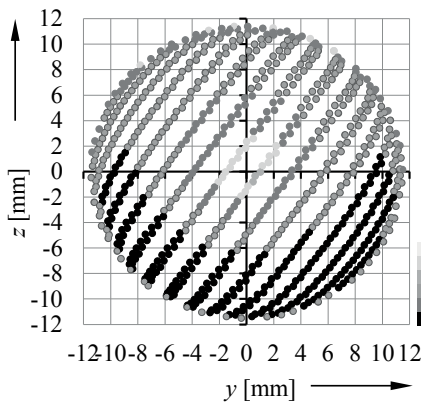


Abbildung 5.14: Draufsicht auf die Messpunkte des Pressteils für die Außenkontur der sphärischen Struktur mit Graustufendarstellung der Abweichungen vom Sollradius

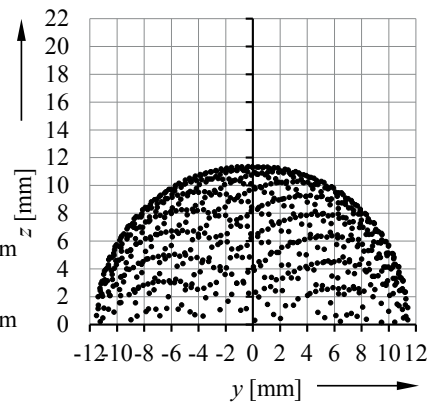


Abbildung 5.15: Seitenansicht auf die Messpunkte des Pressteils für die Außenkontur der sphärischen Struktur

Die Messung des Formteils für die Außenkontur einer sphärischen Referenzstruktur mit $h_0 = 10 \text{ mm}$, $c_0 = 1 \text{ mm}$ und $r_0 = 10 \text{ mm}$ und deren Auswertung zeigen die folgenden Punkteverteilungen, Abbildung 5.14 und Abbildung 5.15.

In Abbildung 5.14 ist die Punkteverteilung in der Draufsicht auf das Teil des Presswerkzeuges dargestellt. Ergänzend zeigt die Abbildung 5.15 die Verteilung der Messpunkte in der Seitenansicht auf das Messobjekt.

Laut CAD-Zeichnung und FEM-Modell soll die Außenkontur der Referenzstruktur einen Außenradius $r_a = 11$ mm besitzen. In Abbildung 5.14 sind die Abweichungen vom Sollradius mithilfe von Graustufen dargestellt. Es ist erkennbar, dass die Abweichungen nahezu kreis- bzw. ringförmig über die sphärische Struktur verteilt sind. Im Scheitel der sphärischen Struktur ist die Abweichung am geringsten und nimmt mit größer werdendem Radius zu, wobei die Abweichungen am Rand wieder geringer werden.

Aufgrund der gemessenen Abweichungen an den Presswerkzeugen ist ersichtlich, dass es mit den Werkzeugen nicht möglich ist, eine ideale Kugelform zu fertigen. Das bedeutet wiederum, dass die fehlerhafte Kontur Einfluss auf die Messergebnisse im Abschnitt 5.1 haben und die Diskrepanz zwischen Berechnungsergebnis und Messung zum Teil erklären kann. Der Vergleich der Ergebnisse aus den Messungen an allen verwendeten Presswerkzeugen zeigt, dass die eingesetzten Werkzeuge selbst schon nicht zu vernachlässigende Abweichungen aufweisen, welche wiederum erheblichen Einfluss auf die Messergebnisse aus dem Abschnitt 5.1 haben. Diese Abweichungen führen dazu, dass die sphärischen Strukturen nicht mehr über eine ideale Kugelgeometrie verfügen und sich im Querschnitt eine veränderliche Wandstärke einstellt.

Mit den Messergebnissen für die wahre Geometrie des Presswerkzeuges und folglich des Prüflings kann ein neues FEM-Modell erstellt werden, welches die sogenannten Imperfektionen beinhaltet. Dazu werden die bestehenden FE-Modelle modifiziert. Bei der Modifikation werden die Knoten selektiert, die im Bereich der Messkoordinaten liegen. Anschließend werden die Knoten um die gemessenen Abweichungen verschoben, sodass die tatsächliche Kontur näherungsweise abgebildet wird. Infolgedessen wird mit dem neuen Modell überprüft, inwieweit die Berücksichtigung von Imperfektionen geschehen muss. Dazu werden die bisherigen Berechnungs- und Messergebnisse mit den neuen Berechnungsergebnissen verglichen, siehe Abbildung 5.16.

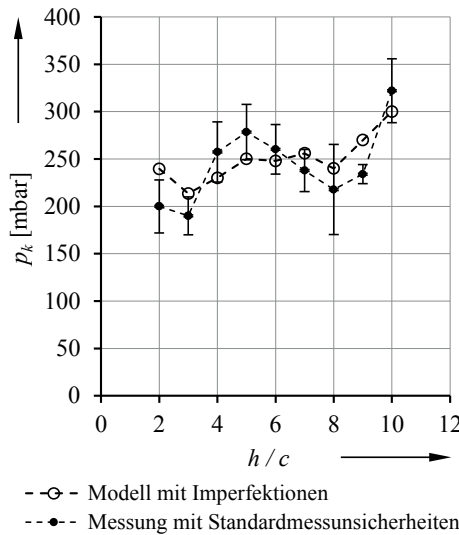


Abbildung 5.16: Vergleich der ermittelten Durchschlaglasten für die unterschiedlichen FEM-Modelle und die experimentellen Messungen

Der Vergleich der Kurven in Abbildung 5.16 zeigt, dass die Ergebnisse für das Modell mit Imperfektionen näher an den Messergebnissen liegen. Die Durchschlaglasten an den sphärischen Strukturen sind unter anderem von der tatsächlichen Geometrie abhängig. Da es sich beim Durchschlagverhalten um einen instabilen Vorgang handelt, haben geringste Störungen an bzw. Abweichungen von der idealen Geometrie großen Einfluss auf die realen kritischen Lasten. Diese Erkenntnisse wurden bereits von Budiansky 1962, Wessels 1977, Shahsiah 2003 u. a. an flachen sphärischen Strukturen aus linear elastischem Material festgestellt und beispielsweise von Degenhardt 2007 experimentell nachgewiesen.

5.4 Zusammenfassung

Im 5. Kapitel der vorliegenden Arbeit wurden die Berechnungsergebnisse messtechnisch überprüft. Die experimentellen Untersuchungen zeigen, dass eine messbare Druckänderung infolge des Durchschlages auftritt. Diese Druckänderung kann mit dem verwendeten Versuchsaufbau ansatzweise nachgewiesen werden.

Weiterhin konnte mithilfe einer Hochgeschwindigkeitskamera das Verformungsverhalten von durchschlagenden sphärischen Strukturen gezeigt werden. Die Aufnahmen lassen asymmetrische Verformungen erkennen.

Die gemessenen Durchschlaglasten weichen von den Berechnungen stark ab. Aus diesem Grund wurden die genutzten Presswerkzeuge ausgemessen, um die „wahre“ Geometrie zu ermitteln. Die Messungen ergaben, dass die Presswerkzeuge eine asymmetrische Gestalt aufweisen. Dies führt dazu, dass die gefertigten sphärischen Strukturen über keine „ideale“ Gestalt verfügen. Daraufhin wurden die FEM-Modelle mit den ermittelten „wahren“ Geometrien nochmals berechnet. Die erneuten Berechnungen führten zu Durchschlaglasten, die im Bereich der gemessenen Durchschlaglasten liegen. Eine Berücksichtigung von Imperfektionen ist für die weitere Auslegung von Durchschlagkörpern unabdingbar. Um zuverlässige Aussagen treffen zu können, müssen die auftretenden Toleranzen und somit die Schwankungen kritischer Designparameter in einer Robustheitsanalyse überprüft werden.

6 Anwendung des Durchschlageffektes in Ventilapplikationen

6.1 Druck- und temperaturgesteuertes Entlüftungsventil für Solarthermieranlagen

Während eines Projektes in Zusammenarbeit mit der AZ Gastechnik GmbH im Rahmen des „Zentralen Innovationsprogramms Mittelstand (ZIM)“ gefördert durch die *Arbeitsgemeinschaft industrieller Forschungsvereinigungen AiF e.V. und "Otto von Guericke" e.V.* wurde ein neuartiges Entlüftungsventil entwickelt, welches speziell in Solarthermieranlagen zum Einsatz kommt. Mithilfe des Ventils sollen bestehende Probleme, wie unregelmäßige und aufwendige Entlüftung, gelöst und der Wirkungsgrad der Anlagen gesteigert werden.

6.1.1 Funktionsweise von Solarthermieranlagen

Im Allgemeinen soll mit einer Solarthermieranlage primär das Trinkwasser aus dem öffentlichen Versorgungsnetz bzw. aus einer Brunnenanlage mit einer durchschnittlichen Eingangstemperatur von 12 °C auf mindestens 45 °C erwärmt werden [Hadamovsky 1996].

In Abbildung 6.1 ist das Funktionsprinzip des Solarkreislaufes einer Solarthermieranlage dargestellt. Die Abbildung zeigt, dass die Anlage eine separate, in sich geschlossene Funktionseinheit darstellt. Der Solarkreislauf ist mit einer Wärmeträgerflüssigkeit, z. B. ein Wasser-Propylenglykol-Gemisch im Verhältnis 60 : 40, gefüllt. Bei Erwärmung der Flüssigkeit im Kollektor (6) wird diese über eine angesteuerte Umwälzpumpe (2) im Vorlauf dem Wärmetauscher (5) des Solarspeichers zugeführt. Im Rücklauf wird die abgekühlte Solarflüssigkeit dem Kollektor zugeführt. Im Falle eines vollständig geladenen Solarspeichers kann der Kollektor Temperaturen erreichen, die weit oberhalb von 100 °C liegen und die zu einer Verdampfung der Wärmeträgerflüssigkeit führen. Die dabei auftretende Volumenvergrößerung wird vom Ausdehnungsgefäß (4) aufgenommen, das neben der Sicherheitstechnik (7, 8, 9) und der Umwälzpumpe (2) im Solarrücklauf angeord-

net ist. Damit wird eine zu hohe Druckbelastung der Teile vermieden. Zum Entlüften beim Befüllen ist am obersten Punkt der Solaranlage der automatische Schnellentlüfter (13) angeordnet. Das Rückschlagventil (Schwerkraftbremse, 11) verhindert ein Aufsteigen von Wärmeträgerflüssigkeit mit höherer Temperatur gegenüber der Temperatur im Kollektorfeld. Nachts, bzw. bei geringer Einstrahlung, sinkt die Temperatur des Wärmeträgers unter die Temperatur im Speicher, und es tritt bei Fehlen des Rückflussverhinderers ein Wärmeaustausch über das Kollektorfeld ein. Eine Absenkung der Brauchwassertemperatur im Speicher ist die Folge.

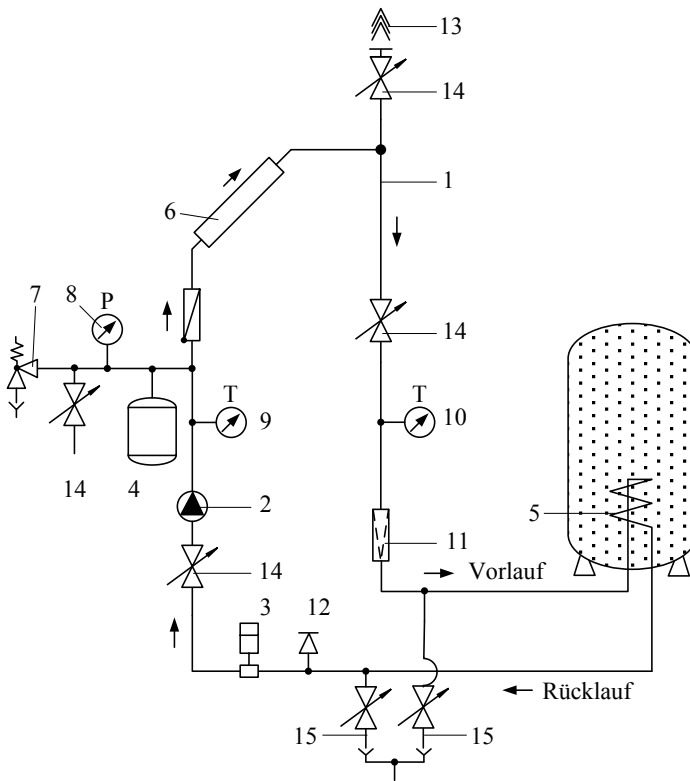


Abbildung 6.1: Funktionsprinzip des Solarkreislaufes einer Solarthermieranlage für Brauchwassererwärmung [Hadamovsky 2004]

Über das Befüllventil (14) wird der minimale Betriebsdruck des Solarkreislaufes mittels einer Pumpe auf mindestens 1,5 - 2 bar eingestellt. Das vor der Umwälzpumpe angeordnete Absperrventil ermöglicht es, den Solarkreislauf zu unterbrechen, um beispielsweise den Austausch der Pumpe vorzunehmen, ohne das Wärmeträgermedium aus dem Kreis-

lauf entfernen zu müssen. Die der Pumpe nachgeschaltete Schwerkraftbremse verhindert ein Leerlaufen des Kollektorfeldes. Über die beiden an der tiefsten Stelle des Solarkreislaufes angeordneten Ventile (15) erfolgt z. B. die Entleerung der Anlage [Hadamovsky 2004].

6.1.2 Problemstellung

In Solarthermieranlagen müssen für deren sichere und effiziente Funktion die durch Ausgasung aus dem Wärmeträger anfallenden Gase regelmäßig aus dem System abgeleitet werden. Die Ableitung dieser Gase kann jedoch nur bei niedrigen Temperaturen erfolgen, da ab ca. 50 °C eine kontinuierliche Ausgasung durch Verdampfung bzw. Verdunstung eintritt, die nicht mehr vernachlässigbar ist und die zu einem Verlust des Wärmeträgermediums führt. Zur Ableitung der Gase kommen derzeit Kombinationen von Kugelhähnen und Schwimmerventilen oder Konstruktionen mit aufwendigen Membranen und entsprechend hohen Kosten zum Einsatz. Während des Betriebs der Anlage müssen die Kugelhahn-Schwimmerventil-Kombinationen geschlossen gehalten werden. Für die Entlüftung muss in regelmäßigen Abständen ein Handwerker auf das Dach steigen und den Kugelhahn per Hand betätigen. Verbunden mit diesem Aufwand entfällt das Entlüften in der Praxis sehr häufig. Durch das fehlende Entlüften sammelt sich Gas in dem System. Das anfallende Gas ist kein guter Wärmeträger, wodurch die gewonnene Wärmeenergie nicht mehr effizient zum Wärmespeicher transportiert werden kann. Der Wirkungsgrad der solarthermischen Anlage nimmt damit ab und eine kosteneffiziente Nutzung ist nicht mehr gewährleistet. Im Rahmen des vorgestellten Projektes sollte ein Entlüftungsventil entwickelt werden, das dauerhaft selbstständig bei Temperaturen unterhalb einer festgesetzten Grenze eine Entlüftung der solarthermischen Anlage sicherstellt und bei Temperaturen oberhalb des festgelegten Grenzwertes das System sicher gas- und flüssigkeitsdicht abschließt. Zudem soll das neuartige Ventil die Aufgabe unter einem minimalen technischen Aufwand (ohne Regelung, Sensorik oder komplexe Aktorik) lösen.

6.1.3 Lösungsansatz

Der innovative Kern des angestrebten Systems ist die Bereitstellung einer vollständig autonomen, thermisch gesteuerten Entlüftung für eine Solarthermieranlage.

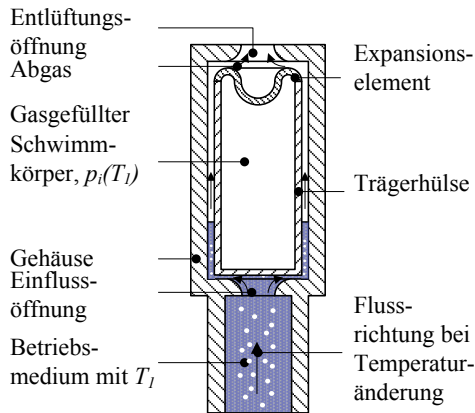


Abbildung 6.2: Schematische Darstellung des Lösungsansatzes im geöffneten Zustand

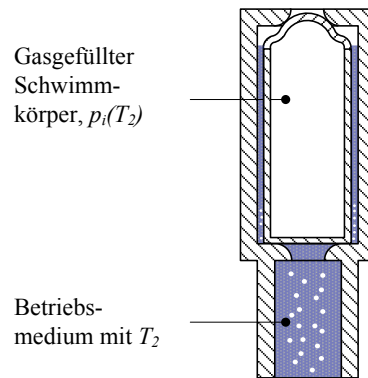


Abbildung 6.3: Schematische Darstellung des Lösungsansatzes im geschlossenen Zustand

Das neuartige Entlüftungsventil besteht aus einem Ventilgehäuse mit Einlass- und Auslassöffnung, siehe Abbildung 6.2. Im Inneren des Ventilgehäuses befindet sich ein schwimmfähiger Ventilkörper, im Weiteren als Funktionselement bezeichnet, aus nichtlinear elastischem Kunststoff. Dieser ist mit Gas unter einem Innendruck $p_i(T_1)$ gefüllt und besitzt an seinen Stirnseiten eine gewölbte Gestalt. Unterhalb einer bestimmten Grenztemperatur des Betriebsmediums befindet sich das Entlüftungsventil im geöffneten Zustand. Das aus dem Solarkreislauf abzuleitende Gas kann am Ventilkörper vorbeiströmen und an der Auslassöffnung entweichen. Im Betrieb der solarthermischen Anlage steigt die Temperatur des Wärmeträgers aufgrund der absorbierten Wärmeenergie aus der Sonneneinstrahlung auf einen Wert T_2 an. Dadurch erwärmt sich gleichzeitig der Ventilkörper und es kommt zur Ausdehnung des darin befindlichen Gases. Da sich das Gas in einem begrenzten Volumen befindet, steigt der Druck im Inneren des Ventilkörpers auf einen Wert $p(T_2)$ an. Aufgrund des ansteigenden Innendrucks kommt es ab einem kritischen Wert zu einer schlagartigen Formänderung des Ventilkörpers. Die zunächst nach innen gewölbten Stirnseiten werden schlagartig nach außen umgestülpt, siehe Abbildung 6.3. Dadurch werden Einlass- und Auslassöffnung des Ventils verschlossen und ein sicherer und effizienter Betrieb der solarthermischen Anlage ist gewährleistet.

Das neuartige Ventil bietet folgende Vorteile:

- selbsttätiges Öffnen und Schließen bei vordefinierten Temperaturen,

- zuverlässige automatische Entlüftung von Solarthermieranlagen.

6.1.4 Vorbetrachtungen der Randbedingungen zur Auslegung des Funktionselementes

Das Hauptfunktionselement ist zylinderförmig gestaltet und verfügt über stirnseitige Verschlüsse bestehend aus einem hyperelastischen Material, welches große Dehnungen bei niedrigen Spannungen zulässt. Im vorliegenden Fall wird ein Butylkautschuk, kurz IIR, mit der Shorehärte 50 A eingesetzt [Phoenix 2008]. Dieses Material zeichnet sich durch eine sehr hohe Luftdichtigkeit aus, was für die Langzeitfunktion des Aktuators wichtig ist. Das Funktionselement ist mit einem Gas gefüllt, welches möglichst dauerhaft im Inneren des Funktionselementes verbleiben soll. Der Erhalt des Gases im Inneren des Funktionselementes ist für die Funktionstüchtigkeit von elementarer Bedeutung, da die Funktion auf der Ausdehnung des Gases beruht. Wenn das Gas entweicht, verändert sich der Druck im Element, was wiederum dazu führt, dass die Temperatur, bei der das Entlüftungsventil schließen bzw. öffnen soll, nicht mehr der ursprünglich angestrebten Temperatur entspricht.

Die Entwicklung des Funktionselementes erfolgt weiterhin unter der Berücksichtigung, dass bei einem bestimmten kritischen inneren Druck im Funktionselement ein mechanischer Durchschlageffekt am Element erfolgt. Dieser Effekt wird durch eine stirnseitige, gewölbte nachgiebige Struktur erreicht, Abbildung 6.4 (in Anlehnung an die Arbeit von BÖHM 2006).

Das Ziel des Durchschlages ist das schnelle bzw. sprungartige Verschließen und Öffnen bei definierten inneren Drücken und damit bei definierten Temperaturen. Des Weiteren erlaubt die Durchschlagcharakteristik, dass das Element trotz einer Temperaturabnahme, bis zu einem daraus resultierenden unteren kritischen Druck, nahezu verschlossen bleibt. Die allgemeine Last-Verschiebungs-Kurve (vgl. Abbildung 2.14) zeigt während der Entlastung, dass der Scheitelpunkt bis zum Erreichen des unteren kritischen Punktes eine geringe Verschiebung im Vergleich zur gesamten Verformung vollzieht. Diese Eigenschaft kann unter geeigneter Auslegung des Funktionselementes für die Schließ- und Öffnungsfunktion vorteilhaft genutzt werden. Weiterhin ergibt sich der angestrebte kritische Druck zum Schließen aus den praktischen Vorgaben, dass die Anlage bei einer maximalen Flüssigkeitstemperatur von ca. 42 °C verschließen soll, um die Effizienz zu erhöhen.

Der Schließdruck im Element erfolgt aus der Annahme, dass das Funktionselement mit Luft bei atmosphärischem Druck und einer Temperatur von 20 °C gefüllt ist. Eine Temperaturerhöhung von 22 K führt wiederum unter der Annahme eines isochoren Vorganges ($V_0 = \text{const}$) zu einem Druckanstieg um ca. 75 mbar im Inneren des Elementes.

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1}{T_1} \rightarrow p_1 = T_1 \frac{p_0}{T_0} \quad (6.1)$$

Des Weiteren ist zu beachten, dass der Durchschlageffekt und die gesamte Verformung am hyperelastischen *hermetisch geschlossenen* Element zu Druckänderungen im Inneren des Elementes führen. Aus einer anfänglich isochoren Zustandsänderung wird im kritischen Punkt und über den Bereich der Instabilität eine isotherme Zustandsänderung ($T_1 = T_{\text{krit}} = \text{const}$). Nach dem Durchschlag findet keine weitere Volumenzunahme statt, $V_2 = \text{const}$, siehe Abbildung 6.4. Aufgrund des kurzzeitigen Auftretens des isothermen Vorganges, erfolgt, je nach Richtung der vorangegangenen Temperaturänderung (Erwärmung oder Abkühlung), ein Druckabfall oder -anstieg bzw. eine Volumenvergrößerung oder -verringern, Abbildung 6.5.

$$p_1 V_0 = p_2 V_2 \rightarrow p_1 = p_{\text{krit max}}; p_{\text{krit min}} < p_2 < p_{\text{krit max}} \quad (6.2)$$

Die beschriebenen Druckänderungen haben wiederum erheblichen Einfluss auf das Schaltverhalten des gesamten Systems. Dieser Einfluss kann bis zu einer Fehlfunktion des Aktuators führen. Deshalb werden V_0 und die entstehende Volumendifferenz zwischen V_0 und V_2 so dimensioniert, dass der innere Druck p_2 nach der Volumenänderung nicht geringer ist als das lokale Minimum (unterer kritischer Druck $p_{\text{krit min}}$) des Last-Verschiebungs-Verlaufes. Ist der Druck nach dem Durchschlag geringer als das lokale Minimum, würde es zu einem sofortigen Rückschlag der Struktur kommen, oder die Struktur verformt sich nicht sprunghaft und der Durchschlageffekt findet nicht statt. Allgemein ergibt sich für ΔV mit Gleichung (6.2) und $V_2 = V_0 + \Delta V$:

$$\Delta V = V_0 \left(\frac{p_1}{p_2} - 1 \right) \quad (6.3)$$

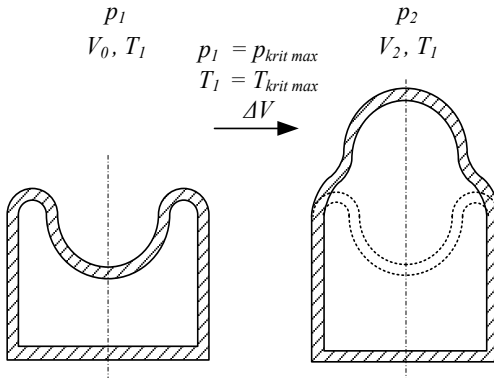


Abbildung 6.4: Darstellung der Volumenänderung des Funktionselementes im Schaltvorgang

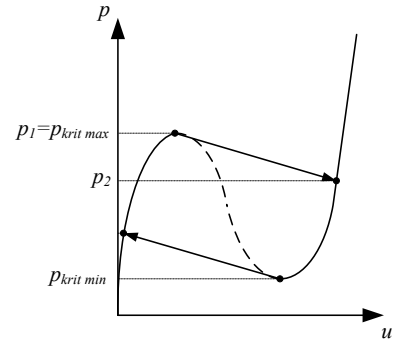


Abbildung 6.5: Druck-Verschiebungs-Verlauf am Element beim Schaltvorgang

Ein weiteres maßgebendes Kriterium für die Dimensionierung des Funktionselementes ist das innere Gesamtvolumen. Das Gas im Inneren des Elementes wird während des Betriebs von dem umgebenden Fluid erwärmt. Die Dauer der Erwärmung ist von dem Gesamtvolumen des zu erwärmenden Gases und der daraus folgenden notwendigen Wärmeenergie abhängig.

$$E_n = c_v \cdot \rho V \Delta T \quad (6.4)$$

- E_n - benötigte Energie
- c_v - spezifische Wärmekapazität von Luft bei konstantem Volumen
- ΔT - Temperaturänderung
- ρ - Dichte von Luft
- V - Volumen der zu erwärmenden Luft

Um die aufzuwendende Energie E gering zu halten, wird das Gesamtvolumen unter Berücksichtigung aller bisher genannten Bedingungen minimiert. Die Auslösezeit t_A des Ventils ergibt sich aus der benötigten Energie E_n und aus der Wärmeleistung P_w , die vom Wärmeträger aufgebracht wird.

$$t_A = \frac{E_n}{P_w} \quad (6.5)$$

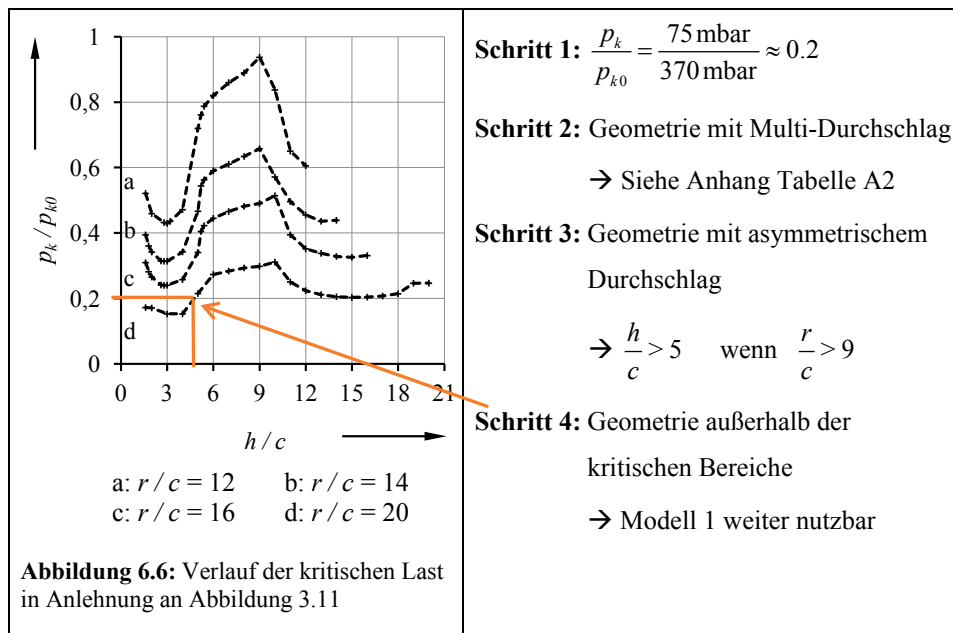
Zusammenfassend gelten die Kriterien in Tabelle 6.1 für die Dimensionierung als maßgebend.

Tabelle 6.1: Kriterien für die Dimensionierung des Funktionselementes

Kriterium	Ziel
V_0 minimieren	Auslösezeit minimieren
$p_{krit\ max}$	Auslösedruck im Inneren des Elementes bei ca. 75 mbar, entspricht einer Temperaturänderung im Solarkreislauf von ca. 22 K
ΔV so einstellen, dass ein Durchschlag möglich ist	$p_2 > p_{krit\ min}$

6.1.5 Gestaltung des Funktionselementes mithilfe von FEM-Berechnungen

Unter Berücksichtigung der aufgeführten Kriterien in Tabelle 6.1 wird eine rechnergestützte Gestaltung des Funktionselementes durchgeführt. Als Ausgangsgeometrie wird ein Hohlzylinder verwendet, bei dem eine Stirnseite verschlossen ist. Die zweite Seite wird mit einer sphärischen Struktur abgedeckt, wobei die sphärische Struktur nach innen gewölbt ist, Abbildung 6.7 a. Die Ausgangsform beruht darauf, dass ein Auslösedruck von ca. 75 mbar angestrebt wird. Mithilfe der Ergebnisse aus Kapitel 3 kann in folgender Weise eine grundlegende Struktur ermittelt werden.



Hierbei wird das Verhältnis aus der geforderten kritischen Last p_k und der Referenzlast p_{k0} gebildet. Mit diesem Wert werden Verhältnisse für h/c und r/c aus der Abbildung 6.6 abgelesen. Weiterhin ist es auf diese Art und Weise möglich, eine Vorauswahl des zu nutzenden Modells (Modell 1 oder Modell 2, siehe Kap. 3) zu treffen.

Sphärische Strukturen mit den ermittelten geometrischen Eigenschaften und unter der Nutzung eines Materials mit einem E-Modul von 2,7 MPa oder einer Shorehärte von 50 A und einer Querkontraktionszahl von 0,49 erreichen Durchschlagdrücke von ca. 75 mbar.

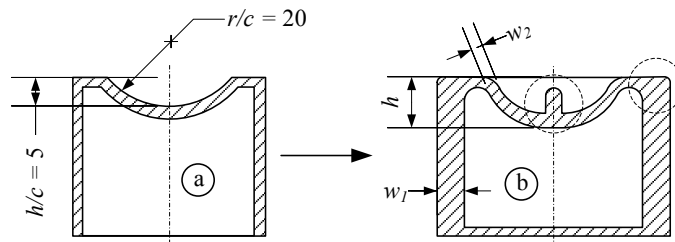


Abbildung 6.7: Ausgangsgeometrie (a) und Geometrie (b) des Funktionselementes

In Abbildung 6.7 b ist die Geometrie dargestellt, die unter Berücksichtigung der Kriterien aus Tabelle 6.1 ermittelt wurde. Diese Geometrie verfügt über unterschiedliche Wandstärken. Im Bereich der sphärischen Struktur wird eine geringere Wandstärke w_2 als am zylinderförmigen Mantel w_1 festgelegt, wobei der Übergang von w_2 zu w_1 kontinuierlich erfolgt und an der vertikalen Schnittebene im Mittelpunkt der Kragenkrümmung beginnt. Durch die höhere Wandstärke des Zylindermantels wird die radiale Dehnung des Zylinders infolge des Innendruckes reduziert, wodurch die Volumenänderung hauptsächlich aus der Verformung der sphärischen Struktur - dem Durchschlag - hervorgeht. Die Höhe der sphärischen Struktur wurde so dimensioniert, dass das auftretende ΔV infolge des Durchschlages die Funktionstüchtigkeit des Ventils nicht beeinträchtigt. Weiterhin wird ein Dorn auf die sphärische Struktur aufgebracht, um die Dichtfunktion zu verstärken. Der Dorn wird im Scheitelpunkt der sphärischen Struktur positioniert, weil dies der Punkt ist, welcher sich bei der Durchschlagverformung nahezu geradlinig in y -Richtung verschiebt. Über diese Verschiebung wird der Dorn in die Ein- und Auslassöffnung geschoben und unterstützt das Abdichten der Anlage.

6.1.6 Ergebnisse des Modells mit Einschränkung auf rotationssymmetrisches Verhalten (Modell 1)

Die folgenden Abbildungen zeigen das FEM-Modell der Struktur, die auch praktisch umgesetzt wurde. In Abbildung 6.8 a sind die aufgebrachten Randbedingungen und Belastungen dargestellt. Die Belastung ist ein gleichmäßig verteilter Druck und wird auf der Innenkontur aufgebracht.

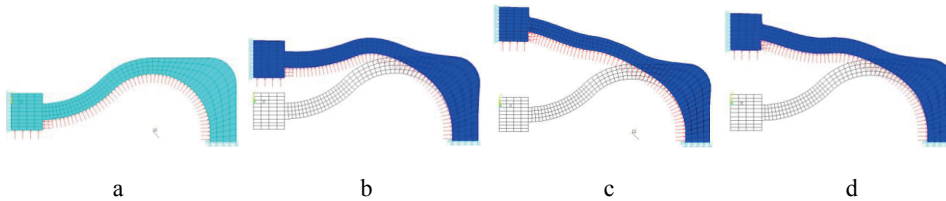


Abbildung 6.8: a - unverformtes Ausgangsmodell, b - Verformung vor dem Durchschlag, c - Verformung nach dem Durchschlag, d - Verformung vor dem Rückschlag

In Abbildung 6.8 b wird die Struktur bei anliegender kritischer Last und vor dem Durchschlag gezeigt. Die kritische Last stellt das lokale Maximum im Last-Verformungs-Verlauf dar, siehe Abbildung 6.9 Punkt b. An diesem Punkt geht die Struktur von einem stabilen in ein instabiles Verhalten über und schlägt durch, zudem wird der diesem Punkt zugehörige Innendruck für die Auslegung des Funktionselementes als Schließdruck deklariert. In Abbildung 6.8 c wird die durchgeschlagene Struktur gezeigt, siehe dazu auch Abbildung 6.9 Punkt c.

In Abbildung 6.8 d wiederum ist das Berechnungsergebnis der Verformungen des Modells dargestellt, wenn die untere kritische Last - der Öffnungsdruck - anliegt, Abbildung 6.9 Punkt d. Die untere kritische Last stellt das lokale Minimum im Last-Verformungs-Verlauf dar. Dieser Zustand führt bei Entlastung dazu, dass die Struktur auch bei der Rückverformung einen Durchschlageffekt aufweist und wird für die Auslegung des Funktionselementes als Öffnungsdruck deklariert.

In Abbildung 6.9 ist der Druck-Verschiebungs-Verlauf eines Punktes der modellierten Struktur auf der Rotations- bzw. Symmetrieachse abgebildet. Die Verformungsbilder in Abbildung 6.8 a bis d sind den einzelnen interessanten Punkten (a - d) in Abbildung 6.9 zugeordnet.

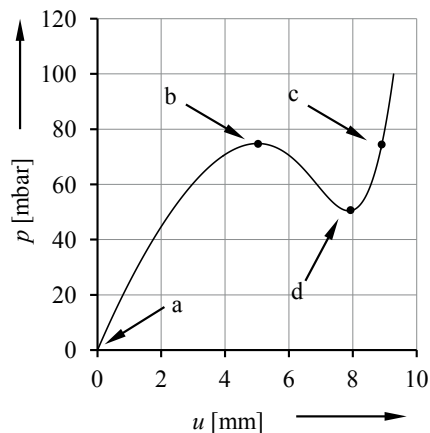


Abbildung 6.9: Last-Verschiebungs-Verlauf des Modells bei axialsymmetrischer Verformung

6.1.7 Ergebnisse des Modells in 3-dimensionaler Betrachtungsweise (Modell 2)

Für die vorangegangenen Berechnungen gilt die Annahme, dass sich das Funktionselement rotationssymmetrisch verformt. Um zu prüfen, ob diese Annahme Gültigkeit besitzt, werden Berechnungen mit dem 3-dimensionalen Modell durchgeführt und untersucht. Die Analysen erfolgen in Anlehnung an die Ausführungen im Kapitel 3.

Die festgelegten Randbedingungen orientieren sich an denen aus den Simulationen mit Modell 1. Das Funktionselement wird am ringförmigen Rand in der Horizontalkreisebene fest eingespannt und ein gleichverteilter Druck auf die Innenflächen aufgebracht.

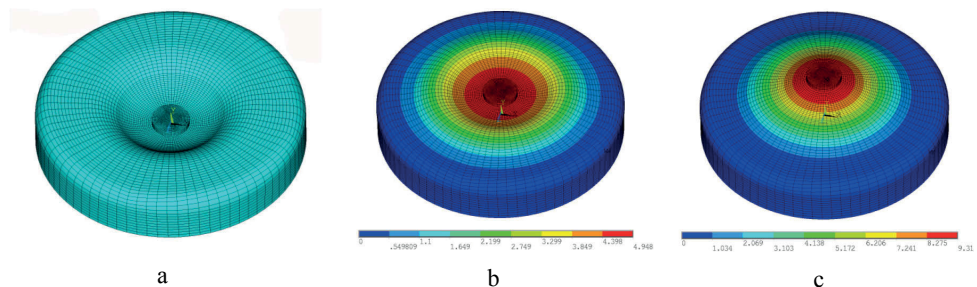


Abbildung 6.10: a - lastfreies Modell, b - Verschiebungen vor dem Durchschlag, c - Verschiebungen nach dem Durchschlag

Die Darstellung in Abbildung 6.10 a zeigt das 3-dimensionale lastfreie Modell. In Abbildung 6.10 b ist die Struktur bei anliegender kritischer Last und unmittelbar vor dem

Durchschlag dargestellt. Diese Verformung entspricht dem Punkt b des Last-Verschiebungs-Verlaufes in Abbildung 6.11.

Mit Überwindung der kritischen Last geht die Struktur in ein instabiles Verhalten über und schlägt durch. Die Kurve in Abbildung 6.11 zeigt jedoch, wie bereits erläutert, nicht den vollständigen Verlauf, d. h. der Bereich mit negativem Anstieg wird nicht ermittelt. Auf den instabilen Bereich - Bereich mit waagerechtem Kurvenverlauf - folgt wieder ein stabiler Verformungsbereich, Abbildung 6.10, Punkt c in Abbildung 6.11.

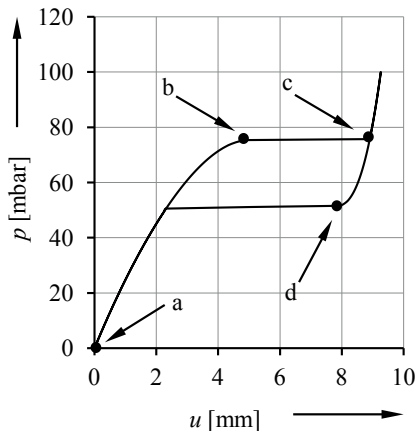


Abbildung 6.11: Last-Verschiebungs-Verlauf des Modells 2 unter der Nutzung des Newton-Raphson-Verfahrens und der „stabilize“-Funktion

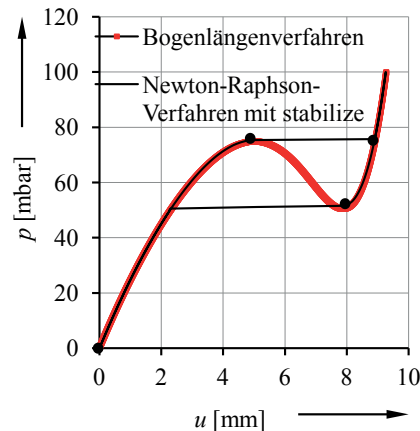


Abbildung 6.12: Vergleich der Last-Verschiebungs-Verläufe aus den beiden Berechnungsverfahren

Mit Bestehen der Maximallast bei $p = 100$ mbar erfolgt die Entlastung. Die Struktur verhält sich bei Entlastung bis zum Erreichen der unteren kritischen Last stabil, vgl. Punkt d in Abbildung 6.11. Überwindet die Struktur diese Last, so geht sie wieder in ein instabiles Verhalten über und schlägt durch, d. h. wieder zurück in Richtung Ausgangslage. Die Kurve in Abbildung 6.12 zeigt, dass Modell 1 und Modell 2 eine sehr hohe Übereinstimmung besitzen. Die kritischen Lasten weichen nur geringfügig voneinander ab.

6.1.8 Spannungs-Dehnungs-Vergleich zwischen den untersuchten Modellen

In Abbildung 6.13 wird gezeigt, dass sich die Spannungsverteilungen der Modelle 1 und 2 sehr stark ähneln und die Verformung und Spannungsverteilung in Modell 2, so wie sie im Modell 1 angenommen wird, rotationssymmetrisch ist. Es treten also keine Asymmetrien im mechanischen Verhalten auf. Somit kann für weitere Untersuchungen auf das ver-

einfachte Modell (Modell 1) zurückgegriffen werden, wodurch eine erhebliche Verkürzung der Rechenzeit möglich ist.

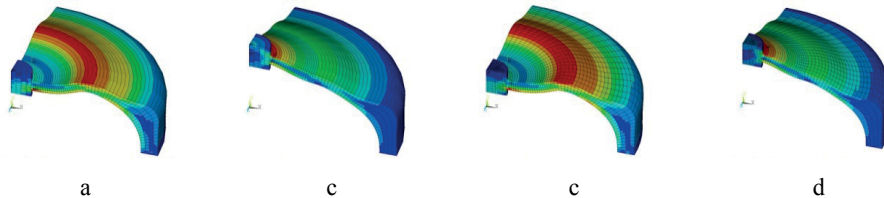


Abbildung 6.13: a - Spannungsverteilung am Modell 1 vor dem Durchschlag, b - Spannungsverteilung am Modell 1 nach dem Durchschlag, c - Spannungsverteilung am Modell 2 vor dem Durchschlag, d – Spannungsverteilung am Viertelchnitt (Modell 2) nach dem Durchschlag

6.1.9 Berechnung der Volumenänderung

Die Berechnung der Volumenänderung wurde mithilfe der Trapezmethode durchgeführt. Mit dieser Methode kann die Fläche unterhalb einer Kurve näherungsweise bestimmt werden. Dabei wird im FE-Modell zwischen zwei benachbarten Knoten und der x -Achse ein Trapez aufgespannt. Die Verbindungslinie zwischen den Knoten wird als Tangente und als Sekante an die Kurve zwischen diesen beiden Punkten gelegt. Somit ergeben sich zwei unterschiedliche Trapeze. Aus den Flächen der Trapeze wird ein Mittelwert gebildet. Dadurch ergibt sich eine Reihe von Trapezen, die in Summe den Flächeninhalt unter der Innenkontur des Funktionselementes näherungsweise darstellen, siehe Abbildung 6.14 [Linß 2008].

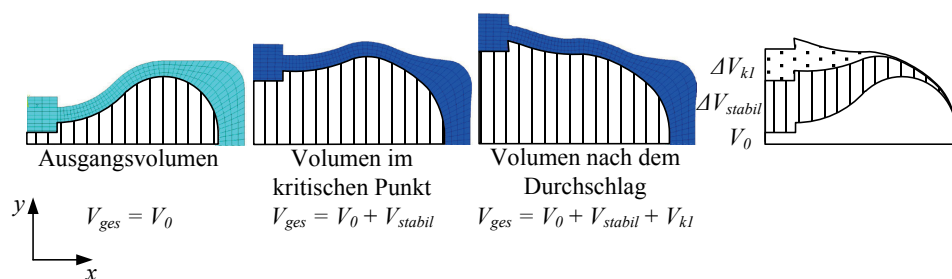


Abbildung 6.14: Schematische Darstellung der Schnittfläche des sich ändernden Volumens innerhalb des Funktionselementes bei Drucksteigerung

Die analytische Berechnung ergibt einen Volumenzuwachs beim Schließvorgang des Entlüftungsventils, also beim Durchschlag der sphärischen Struktur infolge einer Temperaturerhöhung. Die Volumenänderung beträgt ca. 1 cm^3 . Beim Öffnungsvorgang, also bei

Rückschlag der sphärischen Struktur infolge einer Temperaturabnahme, ist die Volumenänderung ca. 2 cm^3 groß, siehe dazu Abbildung 6.15.

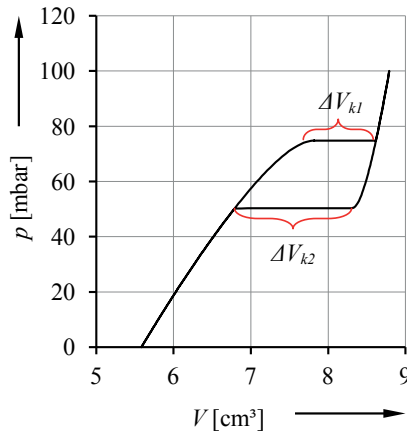


Abbildung 6.15: Verlauf der Volumenänderung bei steigendem Druck im Funktionselement mit Kennzeichnung der Δ -Volumina beim sprunghaften Vorgang.

6.1.10 Experimentelle Überprüfung der Simulationsergebnisse

Prüfung des Auslösedruckes

Die Simulationsergebnisse werden in einem Experiment überprüft, um eine Aussage über die Anwendbarkeit der gewonnenen Ergebnisse treffen zu können. Dazu wird ein Funktionselement, bestehend aus Butylkautschuk und mit den anhand der Simulationen ermittelten geometrischen Abmessungen, in einem Heiz-Press-Verfahren hergestellt. Dazu wird ein Presswerkzeug, wie es in Abbildung 6.17 dargestellt ist, gefertigt. Das Funktionselement (vgl. Abbildung 6.18) wird auf eine Druckprüfvorrichtung gespannt und luftdicht verschlossen (Abbildung 6.16).

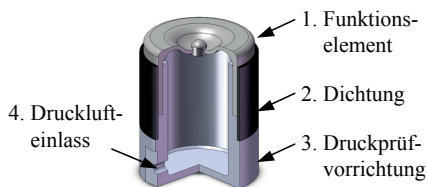


Abbildung 6.16: Schematischer Aufbau der Druckprüfvorrichtung



Abbildung 6.17: Dreiteiliges Presswerkzeug für das Funktionselement des Entlüftungsventils

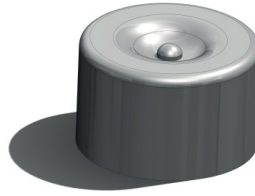


Abbildung 6.18: CAD-Modell des Funktionselementes

Die Druckprüfvorrichtung (3) wird über einen Drucklufteinlass (4) und eine PC-gesteuerte Druckregelung mit einem gleichmäßigen Luftdruck im Inneren beaufschlagt. Dieser Druck wirkt auf das Funktionselement (1). Um eine Verschiebung im Scheitelpunkt des Dorns zu messen, wird ein Punktlasertriangulationssystem eingesetzt. Die Druckregelung und das Wegmesssystem verfügen über eine analoge Signalausgabe und werden über ein Datenerfassungssystem mit einem PC verbunden, siehe auch Kapitel 5. Anhand der gemessenen Daten kann ein Druck-Verschiebungs-Zusammenhang für den Scheitel des Domes wiedergegeben werden, siehe Abbildung 6.19. Die dargestellte Kurve zeigt den Verschiebungsverlauf bei Druckerhöhung und bei anschließendem Druckabfall. Der Bereich der Druckerhöhung zeigt bei 122 mbar und 4,8 mm ein lokales Maximum. Weiterhin weist der Verlauf ein lokales Minimum bei 119 mbar und 6,6 mm auf. Dies zeigt, dass eine Druckänderung infolge des Durchschlages im Inneren der Vorrichtung auftritt. In Betrachtung der Abbildung 6.19 ist zudem erkennbar, dass die Volumenänderung das Auslöseverhalten nicht negativ beeinflusst, da die Volumenänderung im Vergleich zum Gesamtvolumen klein genug ist, sodass kein Rückschlag stattfindet. Die Druckregelung ist so eingestellt, dass ein definierter Maximalwert für den Druck von 200 mbar angestrebt wird. Mit Erreichen dieses Maximalwertes erfolgt die Entlastungsphase. Diese zeigt bei 7 mm und 40 mbar einen starken Abfall des Anstieges der Kurve. Dieser Abfall erfolgt während des Rückschlages des Funktionselementes. In diesem Bereich ist kein Maximum oder Minimum erkennbar. Ursache dafür ist, dass das innere Volumen der Vorrichtung zu groß ist und die Volumenverringerung infolge des Rückschlages keinen Druckanstieg erzeugt, der mit dieser Anlage messbar ist.

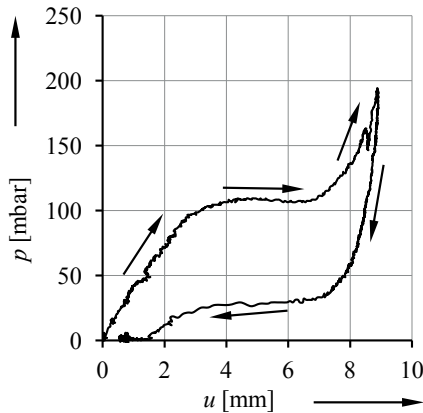


Abbildung 6.19: Druck-Verschiebungs-Verlauf im Scheitelpunkt des Domes für das Funktionselement

In Anlehnung an die Ausführungen zur Auswertung der Messergebnisse in Abschnitt 5.1, ergibt sich ein kritischer Druck von $108 \text{ mbar} \pm 10 \text{ mbar}$ im Inneren des Funktionselementes. Dies entspricht umgerechnet einer theoretischen Auslösetemperatur von $51,6^\circ\text{C} \pm 2,5^\circ\text{C}$ für das Entlüftungsventil. Dieser Wert wird im folgenden Versuch praktisch überprüft.

Prüfung der Auslösetemperatur

Für die Prüfung der Auslösetemperatur wird eine Testumgebung entwickelt, welche die Erwärmung des Funktionselementes über die Wärmeträgerflüssigkeit nachbildet (Abbildung 6.20). Das Funktionselement wird auf eine sogenannte Stabilisierungshülse gespannt und hermetisch verklebt. Diese Hülse schützt das Trägerelement vor Verformung, welche zu Funktionsstörungen führen kann, wodurch die Anlage nicht mehr effizient arbeiten würde. Bei der Herstellung der Hülse ist darauf zu achten, dass ein Material mit einer möglichst hohen Wärmeleitfähigkeit verwendet wird. Zu empfehlen sind metallische Werkstoffe mit großem Wärmeleitkoeffizienten, wie z. B. Silber, Kupfer.

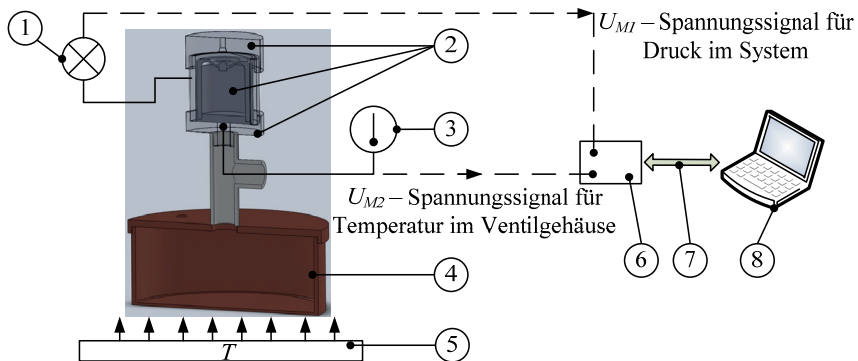


Abbildung 6.20: Schematische Darstellung der Prüfvorrichtung zur Ermittlung der Schalttemperatur des Entlüftungsventils - 1. Drucksensor, 2. Entlüftungsventil, 3. Thermometer, 4. Flüssigkeitsbehälter, 5. Heizplatte, 6. BNC-Anschlussblock, 7. Datenleitung, 8. PC mit DAQ2026-Datenerfassungskarte

Die Abmessungen der Stabilisierungshülse beruhen auf dem ermittelten Δ -Volumen ΔV_{k2} und den angenommenen kritischen Drücken $p_{krit\ max}$ und $p_{krit\ min}$. Das notwendige Innenvolumen des gesamten Schwimmkörpers ergibt sich aus:

$$V_0 = \frac{\Delta V_{k2} \cdot p_{krit\ min}}{p_{krit\ max} - p_{krit\ min}} = \frac{2\text{ cm}^3 \cdot 1,05\text{ mbar}}{1,1\text{ mbar} - 1,05\text{ mbar}} = 42\text{ cm}^3. \quad (6.6)$$

Das Funktionselement, das Trägerelement und die Stabilisierungshülse bilden gemeinsam den Schwimmkörper des Entlüftungsventils. Die Dichtfunktion des Entlüftungsventils wird mithilfe eines Luftstromes im Ventilgehäuse überprüft. Diese Luftzufuhr soll zudem die Ausgasung des Solarfluides simulieren. Die Zufuhr der Luft erfolgt im oberen Drittel des Ventilgehäuses, weil in diesem Bereich die Nebenwirkungen des Luftstromes (Abkühlung des Schwimmkörpers, Auftriebswirkung am Schwimmkörper u. a.) am geringsten sind und das Messergebnis nicht verfälschen. Die Dichtfunktion des Ventils kann nachgewiesen werden, sobald ein Druckanstieg im System erfolgt. Kommt es zum Ventilverschluss, so kann die zugeführte Luft nicht mehr aus dem System entweichen, woraus der Druckanstieg resultiert. Während des Versuches wird der Schwimmkörper auf einem Lochgitter gelagert, um eine ausreichende Menge Wärmeträgerflüssigkeit im Gehäuse zu gewährleisten, siehe Abbildung 6.21. Die Wärmezufuhr erfolgt über eine Labor-Heizplatte, die den Behälter mit der Wärmeträgerflüssigkeit erwärmt.



Abbildung 6.21: Versuchsanordnung des Entlüftungsventils

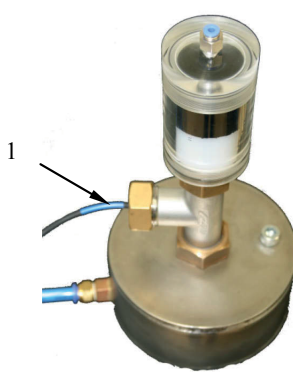


Abbildung 6.22: Versuchsanordnung des Entlüftungsventils mit Versuchsvorrichtung

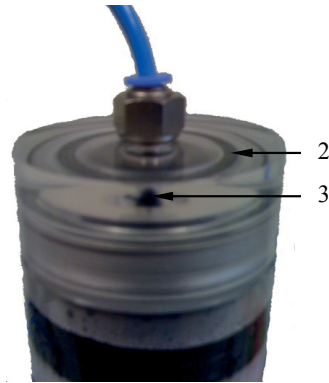


Abbildung 6.23: Verschlossenes Entlüftungsventil

Die Flüssigkeit und der entstehende Dampf können über ein Steigrohr in das Ventilgehäuse gelangen. Im Steigrohr wird ein Temperaturfühler so montiert, dass er von dem erwärmten Medium umspült beziehungsweise umströmt wird, siehe Abbildung 6.22 Pfeil 1. Dies ermöglicht die Bestimmung der Temperatur des Mediums im Inneren des Steigrohres. Im Deckel des Ventils ist ein schwarzer Ring zu erkennen, Abbildung 6.23 Pfeil 2. Dieser resultiert aus dem Abdichten infolge des Aufschwimmens. Unterhalb des Schlauchverbinders ist ein schwarzes Dreieck (Abbildung 6.23 Pfeil 3) sichtbar. Dies ist der Verschlussdom des Funktionselementes im Dichtsitz nach Verformung des Funktionselementes.

In Abbildung 6.24 sind die Verläufe der Temperatur im Ventilgehäuse und des Druckes im Gesamtsystem dargestellt. Der Kurvenverlauf des Druckes weist bei einer Temperatur von $36^{\circ}\text{C} \pm 2^{\circ}\text{C}$ einen starken Anstieg auf. Dies bedeutet, das Ventil verschließt das System, der zugeführte Luftstrom kann nicht mehr durch das Ventil hindurchströmen und es baut sich ein Druck im System auf.

Die Messungen ergeben, dass das Ventil durch sein Schwimmverhalten infolge wärmebedingter Flüssigkeitsausdehnung teilweise verschließt. Der sichere Verschluss erfolgt jedoch nur in der Kombination des Durchschlages und des Aufschwimmens des Ventilkörpers. Denn der Durchschlageffekt führt zum Einen dazu, dass der Dorn in den Dichtsitz geschoben wird und zum Anderen dazu, dass sich der Schwimmkörper in dem Gehäuse verspannt und die Lage des Dorns somit sichert.

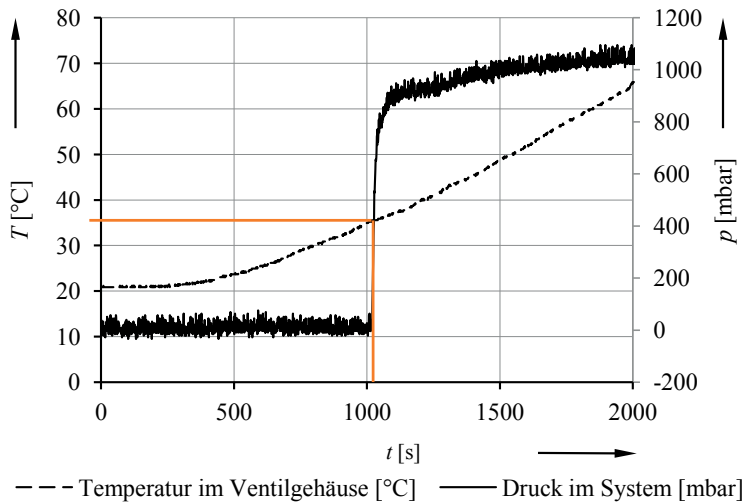


Abbildung 6.24: Verlauf des Temperaturanstieges und des Druckes in der Versuchsvorrichtung während des Versuches zur Ermittlung der Auslö setemperatur des Entlüftungsventils

Das vorgestellte Entlüftungsventil konnte erfolgreich als europäisches Patent angemeldet werden (Patent Nr.: 2368062). Die Firma AZ Gastechnik GmbH ist weiterhin bestrebt, die Entwicklung des Ventils voranzutreiben, um die Grundlagenforschung in ein marktreifes und wettbewerbsfähiges Produkt zu überführen.

6.2 Katheter- und Harnwegventil

Ein weiteres Anwendungsgebiet für den Einsatz des Durchschlageffektes für Ventile ist die Medizintechnik. In diesem Abschnitt wird ein Beispiel für ein unterstützendes System im Bereich der Urologie vorgestellt. Der Hintergrund der Idee besteht darin, ein Ventil bereitzustellen, welches bei Patienten mit Harninkontinenz zum Einsatz kommt. Das Ziel ist, dem Patienten ein gewisses Maß an Unabhängigkeit von seiner Erkrankung zurückzugeben. Das Ventil soll die Kontrolle des Urinlassens mit zusätzlicher Unterstützung durch die Bauchmuskulatur wieder herstellen.

Als Stand der Forschung und Technik sind verschiedene Ansätze für die Gestaltung eines sogenannten Katheter- und Harnwegventils sowie verschiedene Methoden des Öffnens und Schließens eines solchen Ventils zu finden. So existieren Verschlussmechanismen mit Hebeln, Tastern und Schiebern oder die einfachste Methode in Form eines Stopfens [Mirovalve 2009, carevent 2009, Bard 2009]. Alle diese Ventile kommen außerhalb des

Körpers der Patienten zum Einsatz und werden über einen Katheter mit dem erkrankten Organ verbunden. Für die Behandlung der Erkrankung mithilfe von Implantaten werden gegenwärtig künstliche Sphinkter (Schließmuskel), Bänder oder Ringe um den Harnleiter gelegt, um dadurch die Funktion des Schließmuskels zu ersetzen.

Der Nachteil der bisher verwendeten Ventile ist die Lage im, beziehungsweise am Patienten, die aufwendige Sicherung der Hygiene sowie die zum Teil komplizierte Handhabung. Die derzeit eingesetzten Implantate führen in den meisten Fällen zu Reizungen des Harnleiters, was wiederum zu Schmerzen und Unbehagen des Patienten führt. Daher ist das Interesse an einer neuen innovativen Lösung groß. Das Ziel ist es, ein implantierbares biokompatibles Ventil bereitzustellen, welches die Nachteile der bestehenden Lösungen minimiert und somit dem Patienten eine neue Lebensqualität ermöglicht.

6.2.1 Lösungsansatz

Eine mögliche Lösung kann unter Nutzung von nachgiebigen sphärischen Strukturen aus nichtlinear elastischem Material erfolgen. Bei einer normal gefüllten Blase, mit einem Blasendruck von etwa 200 mbar, soll das Ventil dicht geschlossen bleiben. Die Idee besteht weiterhin darin, dass der Patient durch gezielte Anspannung bestimmter Muskelgruppen im Bauchbereich auf die Blase einwirkt, um den Druck der Harnflüssigkeit bzw. in der Harnröhre zu erhöhen.

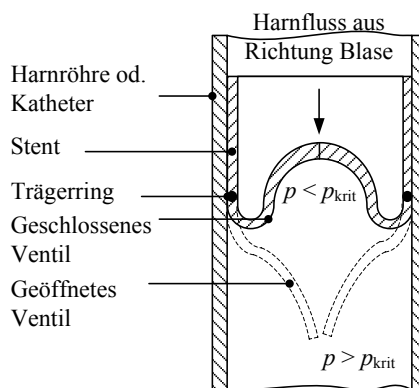


Abbildung 6.25: Eine vereinfachte Darstellung des Lösungsansatzes für ein Harnweg- bzw. Katheterventil

Durch dieses gezielte Anspannen der Bauchmuskulatur kann der Harnblasendruck während der Miktion (Austreibung) auf 400 mbar bis 600 mbar erhöht werden. Mithilfe der

gezielten Druckerhöhung kann das Ventil geöffnet werden. Das Schließen erfolgt selbstständig, sobald ein vorher definierter Flüssigkeitsdruck unterschritten wird.

Abbildung 6.25 zeigt den Lösungsansatz des Katheter- bzw. Harnwegventils in einer vereinfachten Darstellung. Bei der Struktur handelt es sich geometrisch um eine ähnliche Struktur wie im Abschnitt 6.1. Das Ventil soll möglichst in die Harnröhre oder kurz unterhalb des Blasenausgangs implantiert oder im Katheter platziert werden. Dazu kann das Ventil aus Silikon auf einen festeren Träggerring aufgebracht und mit einem Stent in der Harnröhre oder im Katheter positioniert und fixiert werden.

6.2.2 Gestaltung des Ventils mithilfe von FEM-Simulationen

Bei der Gestaltung des Ventils sind folgende Kriterien zu erfüllen, siehe Tabelle 6.2. Der Öffnungsdruck ergibt sich aus dem durchschnittlichen Harnblasendruck während der Miktion (Austreibungsphase beim Urinieren). Der Schließdruck soll möglichst gering sein, damit die Blase so weit wie möglich geleert werden kann und die maximal zulässige Restharnmenge nicht überschritten wird. Das bedeutet, das Ventil soll über eine große Hysterese im Druck-Verschiebungs-Verlauf verfügen. Die Größe des Ventils wird durch den Durchmesser der Harnröhre begrenzt.

Tabelle 6.2: Übersicht zu den Hauptkriterien bei der technischen Auslegung des Ventils

Kriterium	Ziel
Öffnungsdruck $p_{k\ddot{o}}$	ca. 600 mbar, durchschnittlicher Miktionsdruck
Schließdruck p_{ks}	ca. 50 mbar; resultiert aus max. zulässiger Restharnmenge
Maximaler Gesamtradius r_g des Ventils	3 mm, wird durch die Abmessungen der Harnröhre beschränkt

Die Harnröhre hat im Durchschnitt einen Innendurchmesser von ca. 6 mm, den das Ventil nicht überschreiten soll. Weiterhin muss das Ventil über eine Öffnung verfügen, die einen möglichst großen Durchfluss erlaubt, um das Urinlassen in einem erträglichen bzw. zumutbaren Zeitraum zu gewährleisten. Die bisher gezeigten Berechnungsergebnisse aus Kapitel 3 erlauben eine erste Vorauswahl einer möglichen Variante für die weitere Auslegung des Ventils. Zu Beginn wird der Durchschlagdruck als Auswahlkriterium berücksichtigt. In Anlehnung an das Vorgehen zur Vorauswahl einer Grundgeometrie wie im

Abschnitt 6.1, eignen sich sphärische Strukturen, welche ein Verhältnis von $h/c = 4$ und $r/c = 7$ aufweisen. Für solche Strukturen stellt sich ein Durchschlagdruck von ca. 600 mbar ein. Die Überprüfung des Rückschlagdruckes, der bei ca. 114 mbar liegt, zeigt jedoch, dass die sphärischen Strukturen eine zu geringe Hysterese aufweisen, um das angestrebte Ventilverhalten zu realisieren.

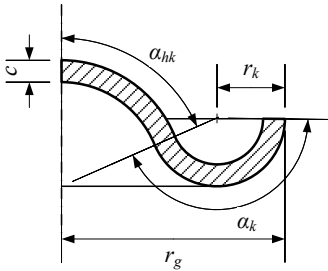


Abbildung 6.26: Darstellung der allgemeinen Struktur des Ventils im halben Querschnitt mit Angabe der Parameter, welche zur Modellierung genutzt werden

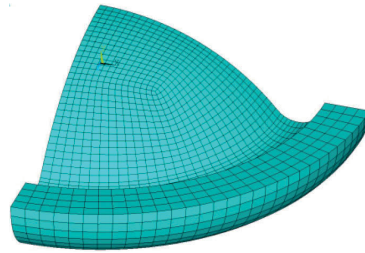


Abbildung 6.27: FEM-Viertelmodell der untersuchten Struktur

In der Arbeit von BÖHM 2006 wurde festgestellt, dass ein torusförmiger Kragen um die sphärische Struktur den Rückschlagdruck beeinflussen kann. Aus diesem Grund wird die sphärische Struktur, ähnlich wie das Funktionselement des Entlüftungsventils, um einen torusförmigen Kragen ergänzt, siehe Abbildung 6.26 und Abbildung 6.27.

Bei der Gestaltung des Ventils werden die in Abbildung 6.26 gezeigten Parameter variiert, um einen Zusammenhang zwischen den Parametern und den geforderten kritischen Drücken zu ermitteln. Im ersten Schritt wird noch keine Öffnung untersucht.

Zunächst wird der Durchschlagdruck an den sphärischen Strukturen und in Abhängigkeit vom geometriespezifischen Öffnungswinkel α_{hk} der sphärischen Struktur ermittelt, wobei $\alpha_k = 90^\circ + \alpha_{hk}$ ist (Abbildung 6.26). Anschließend werden die Wandstärke c und der Radius r_k des Kragens variiert. In Abbildung 6.28 ist die Abhängigkeit des Durchschlagdruckes $p_{k\delta}$ vom Öffnungswinkel α_{hk} für verschiedene Wandstärken c dargestellt. Es ist erkennbar, dass der Anstieg der $p_{k\delta}(\alpha_{hk})$ -Kurve von der Wandstärke c der Struktur abhängt und mit Erhöhung von c zunimmt.

Die zweite geometrische Variation bezieht sich auf den Radius des Kragens r_k . In Abbildung 6.29 ist die Abhängigkeit des Durchschlagdruckes $p_{k\delta}$ vom Öffnungswinkel α_{hk} aus-

zugswise für sphärische Strukturen mit einer Wandstärke $c = 0,5$ mm dargestellt. Die Änderung von r_k zeigt, dass der Radius im Kragen Einfluss auf die Durchschlagfähigkeit der sphärischen Struktur hat. Das bedeutet, dass mit Vergrößerung von r_k ein größerer Öffnungswinkel α_{hk} und somit eine höhere sphärische Struktur erforderlich ist, um ein Durchschlagverhalten zu realisieren. Zudem ist die Änderung des kritischen Druckes für einen bestimmten Wert von r_k im Bereich von 0,7 mm - 0,9 mm vernachlässigbar gering.

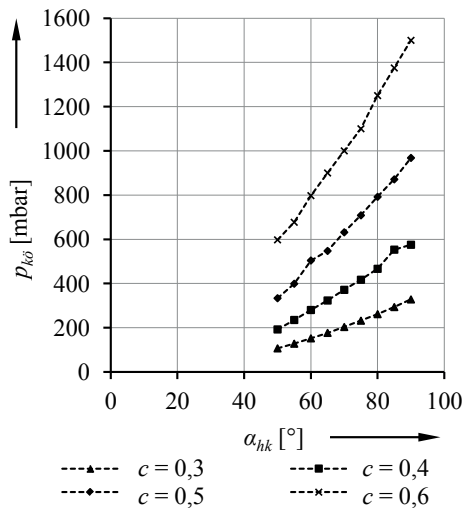


Abbildung 6.28: Verlauf des Öffnungsdruckes p_{k0} in Abhängigkeit des Winkels α_{hk} bei konstantem Radius im Kragen $r_k = 0,7$ mm und mit unterschiedlichen Wandstärken c [mm]

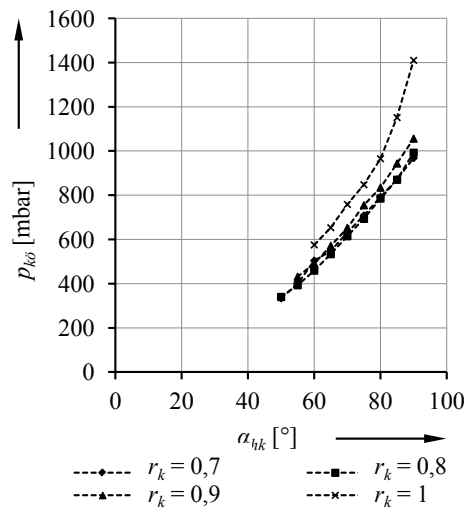


Abbildung 6.29: Verlauf des Öffnungsdruckes p_{k0} in Abhängigkeit des Winkels α_{hk} bei konstanter Wandstärke $c = 0,5$ mm und mit unterschiedlichen Radien im Kragen r_k [mm]

Anhand der in Abbildung 6.28 und Abbildung 6.29 dargestellten Kurven können diejenigen Strukturen eingegrenzt werden, welche das Kriterium für den Öffnungsdruck erfüllen. Dies sind in erster Linie die Strukturen mit einem Durchschlagdruck von $600 \text{ mbar} \pm 50 \text{ mbar}$. Bei diesen Strukturen werden im nächsten Schritt Schließdrücke ermittelt. In Abbildung 6.30 sind die Druck-Verschiebungs-Verläufe für die Strukturen dargestellt, welche aufgrund ihres Durchschlagdruckes ausgewählt wurden.

Eine Forderung zu Beginn der Auslegungen war die Einstellung des Rückschlagdruckes auf 50 mbar, damit die Blase möglichst weit entleert werden kann. Die in Abbildung 6.30 dargestellten Verläufe zeigen, dass die Struktur mit $r_k = 0,7$ mm, $c = 0,5$ mm und $\alpha_{hk} = 70^\circ$ dieses Kriterium erfüllt.

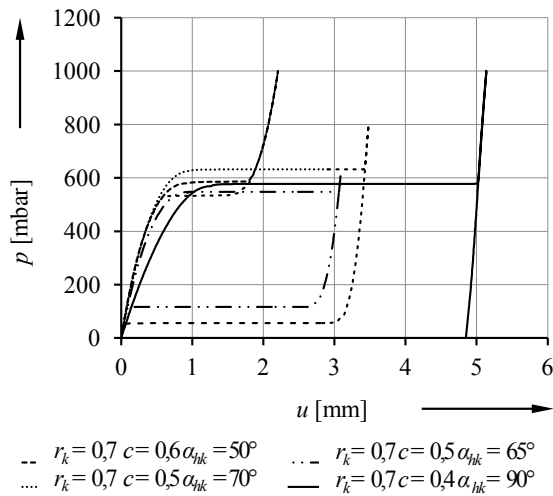


Abbildung 6.30: Druck-Verschiebungs-Verläufe für die Strukturen mit einem Durchschlagdruck von $600 \text{ mbar} \pm 50 \text{ mbar}$

Für die weitere geometrische Gestaltung des Ventils ist die Form der Öffnung zu untersuchen. Die Idee besteht darin, das Material der sphärischen Struktur des Ventils im Scheitel kreuzförmig zu durchtrennen, so dass vier Ventilkappen entstehen, siehe Abbildung 6.31.

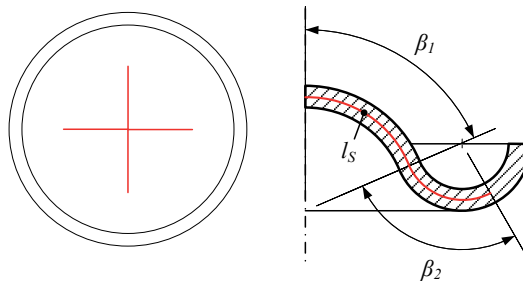


Abbildung 6.31: Skizze des Ventils mit Kreuzschlitz – rote Linie (links) und mit den Parametern für die Schlitzgestaltung (rechts)

Für die Untersuchungen des Schlitzes kann das Simulationsmodell aus Symmetriegründen auf ein Viertelmodell reduziert werden. Die Randbedingungen zwischen den Schnittflächen des Schlitzes beruhen auf zwei aneinander liegenden Ebenen, welche bis zum Durchschlag zusammengepresst werden. Infolge des Durchschlages werden die Flächen getrennt und das Ventil öffnet sich. Um das Modell zu vereinfachen, werden zwei reibungsfreie und starre finite Elemente erstellt, um die Schnittflächen des Schlitzes nachzu-

bilden, siehe Abbildung 6.32. Auf diese starren finiten Elemente und auf die Schnittflächen des Ventils werden Kontakt-elemente aufgebracht. Mithilfe des Kontaktes kann durch die aufeinander liegenden Flächen ein Schlitz simuliert werden.

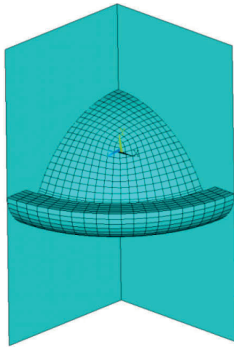


Abbildung 6.32: Ein Viertel des geschlitzten Ventilmodells mit Darstellung der Kontaktelemente für die Schlitzsimulation

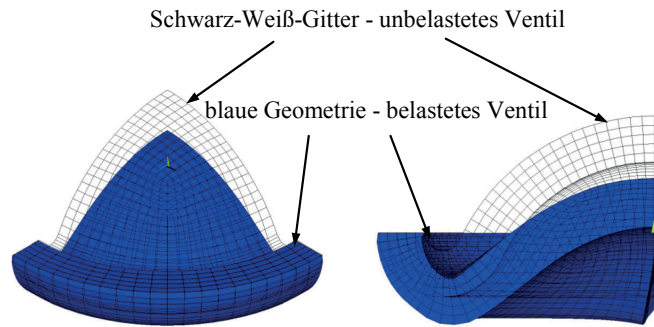


Abbildung 6.33: Ein Viertel des geschlitzten Ventilmodells vor dem Durchschlag (isometrische Ansicht)

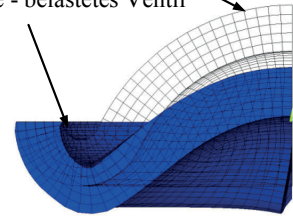


Abbildung 6.34: Ein Viertel des geschlitzten Ventilmodells vor dem Durchschlag (Seitenansicht)

In Abbildung 6.33 und Abbildung 6.34 ist das Viertelmodell des Ventils bei anliegendem Durchschlagdruck dargestellt.

Die Simulationen ergeben, dass die Schlitzlänge l_s im Bereich von 0 mm bis 0,5 mm eine Erhöhung des Durchschlagdruckes um ca. 50 mbar erzeugt, siehe Abbildung 6.37. Das Element mit $\alpha_{hk} = 70^\circ$ weist einen erhöhten Durchschlagdruck für Schlitzlängen von 0,5 mm bis ca. 2,4 mm auf. Bei 2,4 mm wird die sphärische Struktur über den gesamten Meridian – ohne Kragen - geschnitten. Die Schlitzlänge von ca. 2,4 mm ergibt sich aus dem Winkel $\beta_1 = \alpha_{hk}$. Wird der Schlitz bis in den Kragen des Ventils gezogen (mit $\beta_1 + \beta_2$) sinkt der kritische Druck wieder. Durch die Schlitzführung bis in den Kragen neigen die sphärischen Strukturen zu lokalen Öffnungen (Abbildung 6.35) im Bereich des geschlitzten Kragens noch vor dem Durchschlag. Die lokalen Öffnungen beeinträchtigen wiederum die Dichtheit des Ventils. Die Abbildung 6.35 und Abbildung 6.36 zeigen die Darstellung des Abstandes der Kontaktelemente des starren finiten Elementes und der Schnittflächen des Ventilschlitzes zueinander. Die rote Färbung bedeutet, dass die Kontaktelemente vollständig im Kontakt stehen. Der Farbverlauf zeigt den auftretenden Abstand zwischen den Kontaktelementen.

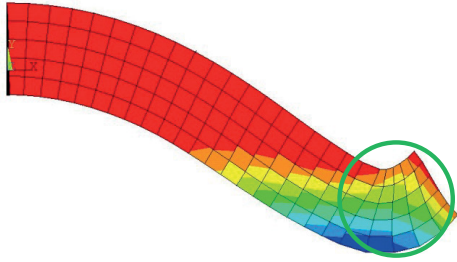


Abbildung 6.35: Darstellung des Abstandes der Kontaktelemente für ein Ventil mit maximaler Schlitzlänge ($c = 0,5 \text{ mm}$, $r_k = 0,7 \text{ mm}$, $\alpha_{hk} = 65^\circ$, $\alpha_k = 90^\circ + \alpha_{hk}$, $l_s = 2,8 \text{ mm}$ bzw. $\beta_1 = 65^\circ$, $\beta_2 = 55^\circ$)

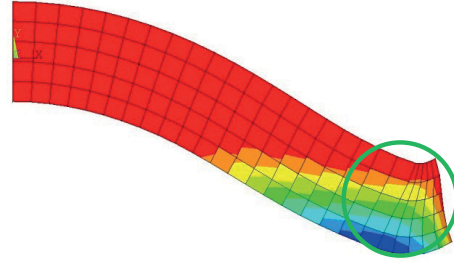


Abbildung 6.36: Darstellung des Abstandes der Kontaktelemente für ein Ventil, bei dem noch keine lokale Öffnung auftritt ($c = 0,5 \text{ mm}$, $r_k = 0,7 \text{ mm}$, $\alpha_{hk} = 65^\circ$, $\alpha_k = 90^\circ + \alpha_{hk}$, $l_s = 2,64 \text{ mm}$ bzw. $\beta_1 = 65^\circ$, $\beta_2 = 35^\circ$)

In Abbildung 6.35 ist erkennbar, dass die gesamte Querschnittsfläche des Ventils im Bereich des Kragens (grüner Kreis) keinen Kontakt mehr zum verformungsfreien finiten Kontaktelement hat (rote Elemente sind mit dem starren Element in Kontakt). Das bedeutet, dass im Bereich des grünen Kreises eine lokale Öffnung auftritt. Demgegenüber ist in Abbildung 6.36 ein Beispiel mit einer Schlitzlänge gezeigt, bei der keine lokale Öffnung vor dem Durchschlagen auftritt (komplette obere Reihe mit roten Elementen über den gesamten Querschnitt).

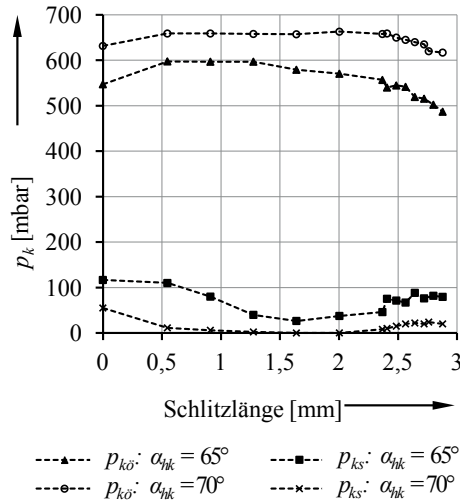


Abbildung 6.37: Abhängigkeit der kritischen Lasten $p_{k\dot{o}}$ und p_{ks} von der Schlitzlänge für die mithilfe von Abbildung 6.30 ausgewählten sphärischen Strukturen

Die Betrachtung des Schließdruckes hingegen zeigt, dass der Schließdruck mit der Verwendung des Schlitzes sinkt. Die sphärische Struktur mit $\alpha_{hk} = 70^\circ$ neigt infolge des Schlitzes dazu, dass der Schließdruck auf Null absinkt.

Aufgrund des Auftretens von lokalen Öffnungen im Kragen und des zu geringen Schließdruckes bei den soeben gezeigten Ventilvarianten wird eine leicht geänderte Geometrie mit Schlitz untersucht, bei der $\alpha_{hk} = 65^\circ$ ist. Es zeigt sich, dass diese Geometrie zu Ergebnissen führt, die den Kriterien aus Tabelle 6.1 entsprechen. In Abbildung 6.38 ist das gesamte Modell des Katheter- bzw. Harnwegventils vor dem Durchschlagen bei anliegendem kritischem Druck (a) und im geöffneten Zustand (b) dargestellt.

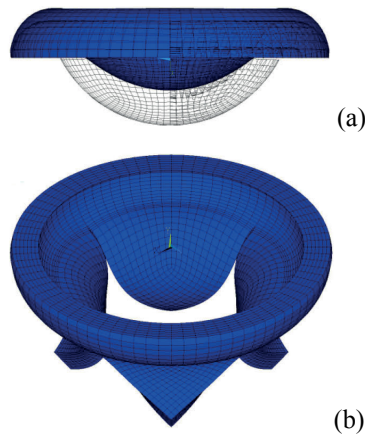


Abbildung 6.38: FEM-Modell des geschlossenen (a) und geöffneten (b) Ventils

6.2.3 Experimentelle Überprüfung der Simulationsergebnisse für die ausgewählte Ventilgeometrie

Anhand der Auswertung der Berechnungsergebnisse kann eine Ventilstruktur für die praktische Umsetzung ausgewählt werden. Dazu werden ein Presswerkzeug und schließlich ein Demonstrator gefertigt. Für den Demonstrator werden folgende geometrischen Abmessungen verwendet:

$$c = 0,5 \text{ mm}, r_k = 0,7 \text{ mm}, \alpha_{hk} = 65^\circ, \alpha_k = 90^\circ + \alpha_{hk}, l_s = 1,27 \text{ mm bzw. } \beta_l = 35^\circ$$

Zur Funktionsprüfung wird ein Flüssigkeitsdruck auf das Ventil aufgebracht, um das Öffnungs- und Schließverhalten zu erproben. Zur Prüfung des Demonstrators / Ventils wird dieser über einen Schlauch mit einem Flüssigkeitsbehälter verbunden. Der Flüssigkeits-

behälter wird in Richtung der Schwerkraft verschiebbar gelagert. Das Ventil wird in einem weiteren Behälter fixiert, um die Flüssigkeit aufzufangen.

Der Flüssigkeitsbehälter wird entgegen der Schwerkraft verschoben, so dass eine Höhendifferenz zwischen Ventil und Behälter und somit eine Flüssigkeitssäule im Schlauch entstehen. Der Höhenunterschied bewirkt, dass die Flüssigkeit (im vorliegenden Fall Wasser) im Schlauch einen Druck auf das Ventil ausübt (hydrostatischer Druck). Der Behälter muss ca. 600 mm über dem Ventil liegen, um einen Öffnungsdruck $p_{k\ddot{o}}$ von ca. 600 mbar zu erzeugen. Um das Ventil zu verschließen, muss der Höhenunterschied auf unter 40 mm reduziert werden. Die experimentellen Untersuchungen ergeben kritische Drücke von $p_{k\ddot{o}} = 500 \text{ mbar} \pm 25 \text{ mbar}$ und $p_{k\ddot{s}} = 50 \text{ mbar} \pm 2,5 \text{ mbar}$. Die Ursachen für die Abweichungen zwischen theoretischen und experimentellen Ergebnissen wurden bereits im Kapitel 5 diskutiert. Zudem stellt die Gestalt der Öffnung ein weiteres Problem dar. Der anliegende Druck kann die Ventillappen nicht weit genug öffnen, um einen maximalen Volumenstrom zu erreichen.



Abbildung 6.39:
Demonstrator des Ventils,
isometrische Ansicht



Abbildung 6.40:
Demonstrator des Ventils,
Draufsicht



Abbildung 6.41: Demonstrator des
Ventils im Größenvergleich mit ei-
nem Eurocent

Die Abbildungen 6.39 bis 6.41 zeigen den Demonstrator des Ventils in isometrischer Ansicht und in der Draufsicht sowie im Größenvergleich mit einer Ein-Eurocent-Münze. Die prinzipielle Funktionsfähigkeit des Ventils als Harninkontinenzhilfe bzw. Katheterventil konnte nachgewiesen werden. Um ein endgültiges medizintechnisches Produkt bereitzustellen, sind noch weiterführende Untersuchungen im Hinblick auf Dichtheit, maximalen Volumenstrom, Implantierbarkeit, Bioverträglichkeit u. a. durchzuführen.

6.3 Sensor-Aktor-Element

In den vorangegangenen Untersuchungen wurden zahlreiche theoretische Grundlagen geschaffen, die es erlauben verschiedene praktische Anwendungen zu entwickeln. In diesem Abschnitt wird die Möglichkeit vorgestellt, ein Sensor-Aktor-Element zu realisieren, welches den mechanischen Durchschlageffekt als Aktorik nutzt und über die mechanisch-elektrischen Eigenschaften von elektrisch leitfähigem Silikon eine Sensorfunktion zur Verfügung stellt.

Elektrisch leitfähiges Silikon verfügt über die Eigenschaft, eine messbare Widerstandsänderung bei mechanischer Belastung zu erzeugen. Materialien mit solchen Eigenschaften werden in der Technik bereits vielfältig eingesetzt. Aufgrund von bereits vorhandenen und umfangreichen Untersuchungen zu den mechanischen Eigenschaften von elektrisch leitfähigem Silikon wird an dieser Stelle zur weiteren Vertiefung auf folgende Arbeiten verwiesen [Mair u. Roth 1989; Grambow 2002; Spielmann 2006; Mattmann 2008].

Für die Herstellung der ersten Variante des Sensor-Aktor-Elementes wird dasselbe Presswerkzeug verwendet, wie es in Abbildung 5.11 dargestellt ist. Als Material wird ein elektrisch leitfähiges Silikon benutzt. Die Verbindung zwischen dem leitenden Silikon-element und einem Messgerät kann mithilfe eines Kupfernetzes erfolgen, das mit einem Kupferdraht verlötet wird, siehe Abbildung 6.42. Während des Pressvorganges wird das Netz vollständig von Silikon umschlossen und führt somit zu einem geeigneten Verbund (Abbildung 6.43).

Zur Herstellung der zweiten Variante von sphärischen Strukturen, die mit einem Streifen leitfähigen Silikons versehen sind, kann ein Presswerkzeug eingesetzt werden, das dem bereits genannten ähnelt. In das Presswerkzeug, wie in Abbildung 6.44 dargestellt, ist eine zusätzliche Nut gefräst. In diese Nut wird die Rohmasse leitfähigen Silikons eingefüllt.

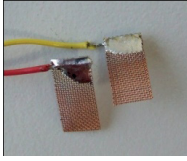


Abbildung 6.42: Kontaktelemente zur Kontaktierung des leitfähigen Silikons

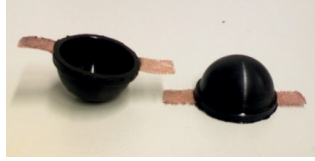


Abbildung 6.43: Silikonkappen aus leitfähigem Silikon mit Kontaktstellen



Abbildung 6.44: Presswerkzeug zur Herstellung von Silikonkappen mit einem Streifen leitfähigen Silikons

Die Herstellungsmethode, ein Presswerkzeug mit einer eingebrachten Nut zu verwenden, ermöglicht eine stoffschlüssige Verbindung zwischen den verschiedenen Silikonen (elektrisch leitfähiges und elektrisch isolierendes) und führt dazu, dass der Streifen leitfähigen Silikons als inhärenter Bestandteil der gesamten nachgiebigen Struktur betrachtet werden kann. Der eingebettete Streifen erfüllt eine zusätzliche Funktion. Der Streifen kann zur Versteifung der sphärischen Struktur genutzt werden. Des Weiteren wird die Sensitivität der Sensorfunktion des Elementes erhöht, indem die Masse und Geometrie des leitfähigen Silikons auf einen Streifen reduziert wird. Die folgende Abbildung zeigt verschiedene Varianten, wie das leitfähige Material angeordnet werden könnte, Abbildung 6.45. In Abbildung 6.46 sind zwei Sensor-Aktor-Elemente dargestellt, die realisiert wurden.

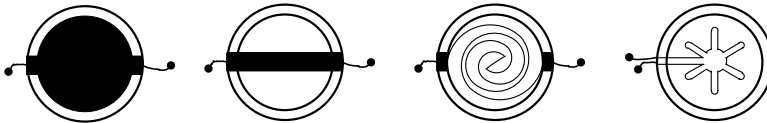


Abbildung 6.45: Beispiele für die Anordnung von elektrisch leitfähigem Material auf der sphärischen Struktur, v.l.n.r.: vollständige sphärische Struktur aus elektrisch leitfähigem Material, gerader Streifen aus elektrisch leitfähigem Material über Meridian, spiralförmig angeordnetes elektrisch leitfähiges Material auf der sphärischen Struktur, sternförmig angeordnetes elektrisch leitfähiges Material auf der sphärischen Struktur

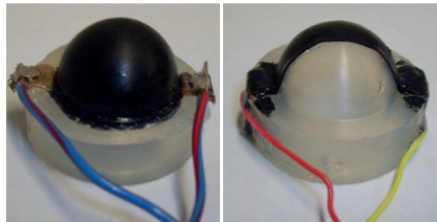


Abbildung 6.46: Zwei mögliche Varianten der Sensorelemente, links – sphärische Struktur vollständig aus leitfähigem Silikon, rechts – sphärische Struktur mit Streifen aus leitfähigem Silikon

7 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde das Durchschlagverhalten von nachgiebigen rotations-symmetrischen Strukturen unter der Nutzung verschiedener Materialmodelle untersucht. Bei den Untersuchungen wurden zunächst sphärische Strukturen betrachtet. Im ersten Schritt wurde ein rotationssymmetrisches Verformungsverhalten angenommen. In einem zweiten Schritt wurden Strukturen ohne die Einschränkung des Verformungsverhaltens berechnet. Es wurden Strukturen untersucht, die als Schale betrachtet werden konnten und Strukturen, die aufgrund ihrer geometrischen Abmessungen als Volumenkörper einzustufen waren. Mithilfe der Berechnungen konnten folgende Ergebnisse erzielt werden:

- Es existieren sphärische Strukturen die, kein Durchschlagverhalten zeigen, welche eine Mono-Durchschlagcharakteristik oder Multi-Durchschlagcharakteristik aufweisen, siehe Tabelle 7.1.
- Die durchgeführten FEM-Berechnungen ergaben fünf charakteristische Last-Verschiebungs-Verläufe, siehe Anhang Tabelle A1.
- Der Verlauf der $p_k / p_{k0}(h / c)$ - Kurve von sphärischen Strukturen mit rotations-symmetrischem Verhalten gleicht im untersuchten Bereich qualitativ der $p_k / p_{zoe}(\lambda)$ -Kurve, die in Budiansky 1959 beschrieben wird.
- Das qualitative Verhalten der $p_k / p_{k0}(h / c)$ - Kurve wird vom Materialmodell (HOOKE / MOONEY-RIVLIN) nicht beeinflusst.
- Es existieren sphärische Strukturen, die unterschiedliche Abmessungen aufweisen aber zu einer identischen kritischen Last führen.
- Unter den betrachteten Geometrien weisen sphärische Strukturen mit einem Wert von $h / c \approx 2,41$ besonders geringe Durchschlaglasten auf. Demgegenüber weisen sphärische Strukturen mit $h / c \approx 8,44$ besonders große Durchschlaglasten auf.
- Die Verschiebung des Scheitelpunktes von sphärischen Strukturen wird bei anliegender kritischer Last in erster Linie von h / c bestimmt, und der Einfluss von r / c sinkt mit steigendem h / c .
- Die maximalen Dehnungen an sphärischen Strukturen bei anliegender kritischer Last treten in der Nähe des Scheitels auf ($\theta / \theta_{max} \leq 0,4$).

- Die maximalen Verschiebungen treten im mittleren Bereich der Krümmung auf ($0,5 \leq \theta / \theta_{max} \leq 0,7$).
- Durch die Berechnungen eines 3D-Modells und ohne die Einschränkung auf ein rotationssymmetrisches Verformungsverhalten konnte asymmetrisch einsetzendes Durchschlagen festgestellt werden.
- Es konnten sieben charakteristische Bereichsformen identifiziert werden, in denen asymmetrisches Durchschlagen beginnt. Die Bereichsformen weisen rotations-symmetrisches (kreis- und ringförmig) und asymmetrisches Verhalten (bogenförmig und zwei bis vier lokale Durchschlagstellen) auf.
- Der Verlauf der $p_k / p_{k0}(h / c)$ -Kurve des 3D-Modells unterscheidet sich qualitativ von der Kurve des Modells mit der Annahme des rotationssymmetrischen Verhaltens.
- Der Einfluss von h / c auf die kritische Last bei hohen dünnen sphärische Strukturen ($r / c \geq 12$; $h / c \geq 12$) ist gering.
- Der Vergleich der Verschiebung des Scheitelpunktes bis zum Erreichen der kritischen Last zeigt, dass die Verschiebungen geringere Unterschiede aufweisen, trotz unterschiedlicher Berechnungs- und Betrachtungsarten.

Im Anschluss an die Berechnungen und Untersuchungen des Verhaltens von sphärischen Strukturen wurde der Einfluss der Meridianform auf das Durchschlagverhalten ermittelt. Dabei wurden sphärische Strukturen, Kegelstrukturen und parabolische Strukturen mit gleichbleibender druckbelasteter Fläche verglichen. Durch den Vergleich konnte Folgendes gezeigt werden:

- Flache sphärische und flache parabolische Strukturen weisen ein ähnliches Durchschlag- und Verformungsverhalten auf.
- Unter den betrachteten Geometrien sind sphärische Strukturen mit $h / c = 5, \dots, 6$ steifer als vergleichbare parabolischen- und Kegelstrukturen. Demgegenüber sind Kegelstrukturen im Wesentlichen nachgiebiger als die beiden anderen untersuchten Strukturen.
- Die untersuchten Kegelstrukturen weisen keine Multi-Durchschlagcharakteristik im Last-Verschiebungs-Verlauf auf.

Nach Abschluss der theoretischen Untersuchungen wurden die Berechnungsergebnisse messtechnisch überprüft. Die experimentelle Überprüfung der kritischen Lasten wurde

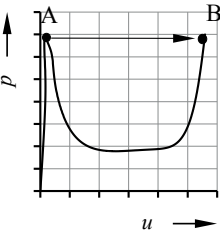
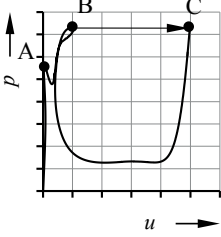
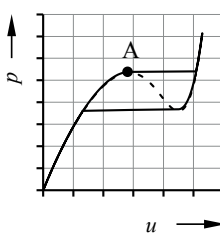
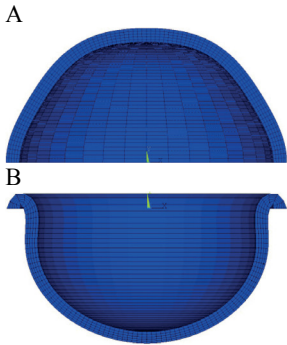
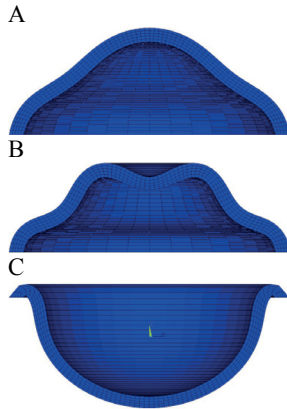
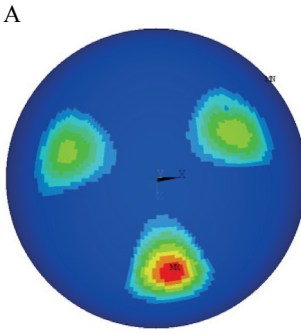
PC-gesteuert mithilfe eines Druckreglers und eines Drucksensors durchgeführt. Zudem wurde das Verformungsverhalten mit einem Laserwegmesssystem und einer Hochgeschwindigkeitskamera gemessen. Die Messungen und deren Auswertung ergaben:

- Die Aufnahmen mit der Hochgeschwindigkeitskamera lassen asymmetrische Verformungen erkennen.
- Die gemessenen Durchschlaglasten weichen um bis zu 30 % von den Berechnungen ab.
- FEM-Modelle mit sogenannten Imperfektionen führen zu kritischen Lasten von denen die Messungen maximal ca. 10 % abweichen.

Die grundlegenden Ergebnisse und Kenntnisse flossen in die Entwicklung eines Entlüftungsventils für Solarthermieanlagen und eines Harnweg- oder Katheterventils ein. Im Rahmen dieser Arbeit konnte ein Demonstrator des Entlüftungsventils umgesetzt werden. Die Idee zu dem Entlüftungsventil konnte erfolgreich zu einem europäischen Patent angemeldet werden. Das Ventil wird von der Firma „AZ Gastechnik GmbH“ weiter entwickelt und nach Möglichkeit zur Serienreife gebracht.

Die Entwicklung zum Katheter- und Harnwegventil führt zu einer nachgiebigen Struktur aus einem Silikon, das funktionell den Anforderungen entspricht. Es wurde eine Struktur entwickelt, die mithilfe eines Stents im Harnleiter oder in einem Blasenkatheter platziert werden kann.

Tabelle 7.1: Zusammenfassung der Durchschlagcharakteristiken und deren Parameter

Durchschlagfähigkeit / Mono-Durchschlagen	Multidurchschlagen	Asymmetrisches Durchschlagen
 <p>Abbildung 7.1: Schematischer Last-Verschiebungs-Verlauf für Mono-Durchschlagverhalten</p> <p>Allg. Form der sphärischen Struktur: Dick bis dünn - flach</p> $\frac{h}{c} \approx 1,6 \quad \text{wenn} \quad \frac{r}{c} \geq 3$ $\frac{h}{c} \leq 5 \quad \text{wenn} \quad \frac{r}{c} \geq 3$ <p>Nutzbares Modell: Modell 1</p>	 <p>Abbildung 7.2: Schematischer Last-Verschiebungs-Verlauf für Multi-Durchschlagverhalten</p> <p>Allg. Form der sphärischen Struktur: Dick bis dünn – hoch</p> <p>Parameterverhältnisse siehe Anhang Tabelle A2</p> <p>Nutzbares Modell: Modell 2</p>	 <p>Abbildung 7.3: Schematischer Last-Verschiebungs-Verlauf für Durchschlagverhalten nach Berechnung mit „stabilize“</p> <p>Allg. Form der sphärischen Struktur: Mitteldick bis dünn – mittel-hoch bis hoch</p> $\frac{h}{c} > 5 \quad \text{wenn} \quad \frac{r}{c} > 9$ <p>Nutzbares Modell: Modell 2</p>
Verformungen an den signifikanten Punkten im Last-Verschiebungs-Verlauf		
		

Abkürzungsverzeichnis

FEM	Finite-Elemente-Methode
E-Modul	Elastizitätsmodul
APDL	ANSYS Parametric Design Language
2D	zweidimensional
3D	dreidimensional
PC	Personal Computer
BNC	Bayonet Neill Concelman
DAQ	Data acquisition
CAD	Computer-aided design
KMG	Koordinatenmessgerät
fps	Frames per second
FEM-Modell	Finite-Elemente-Methode-Modell
IIR	Butylkautschuk
GUM	Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement

Verwendete Formelzeichen

A	Fläche
a	Radius des Horizontalkreises in der Ebene
a_b	Gelenkabstand beim Balkenträger
a_c	Radius des Horizontalkreises in der Ebene zzgl. Wandstärke
a_{ke}	Radius des Horizontalkreises in der Ebene von einer Kegelstruktur
a_{pa}	Radius des Horizontalkreises in der Ebene von einer parabolischen Struktur
a_{se}	Radius des Horizontalkreises in der Ebene von einer sphärischen Struktur
B	Biegesteifigkeit
b	diskretisierte Bogenlänge
b_{pa}	Stauchung einer Parabel
b_1, b_2, b_3	Koeffizienten
c	Wandstärke
\mathbf{C}	CAUCHY-GREEN-Verformungstensor
c_G	Steifigkeit im elastischen Gelenk
c_v	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen
E	Elastizitätsmodul
E_n	Energie
F	Kraft
f	Freiheitsgrad
\mathbf{F}	Verformungsgradient
F_{cr}	kritische Kraft
F_s	Kraft im Stab
\mathbf{G}	Matrix des Residuums
h	Höhe
h_k	Kontrollparameter
h_{kkrit}	kritischer Kontrollparameter
I	Invariante
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_T	Tangentensteifigkeitsmatrix
l	Länge
m	Masse
M_y	Mantelfläche um y -Achse
M_θ	Streckenbiegemoment in θ -Richtung
M_φ	Streckenbiegemoment in φ -Richtung
n	Nummer des Messpunktes

N_x	Streckennormalkraft in x -Richtung
N_θ	Streckennormalkraft in θ -Richtung
N_φ	Streckennormalkraft in φ -Richtung
P	Punkt
P_s	Scheitelpunkt
\mathbf{P}	Matrix der äußeren Kräfte
p	Druck
p_{kmax}	maximaler kritischer Druck
$p_{kö}$	Öffnungsdruck
p_{kr}, p_k, p_{cr}	kritischer Druck
$p_{krit\ max}$	oberer kritischer Druck (Druckmaximum)
$p_{krit\ min}$	unterer kritischer Druck (Druckminimum)
p_{ks}	Schließdruck
p_x	Druck in x -Richtung
p_z	Druck in z -Richtung
p_{zoe}	Zoelly Last
P_w	Wärmeleistung
q	reale kritische Last
q^*	theoretische kritische Last
Q_θ	Streckenquerkraft in θ -Richtung
Q_φ	Streckenquerkraft in φ -Richtung
r	Radius
r_g	Gesamtradius des Katheter- und Harnwegventils
r_k	Radius des Kragens
r_{ku}	Hauptkrümmungsradius bzw. Öffnungsradius des Meridians einer sphärischen Struktur
r_s	Systemcharakteristik
r_θ	Hauptkrümmungsradius bzw. Öffnungsradius des Meridians
r_φ	Hauptkrümmungsradius des Breitenkreises
\mathbf{R}	Matrix der Knotenkräfte
ΔR	Widerstandsänderung
s	Bogenlänge
s_{sa}	Standardabweichung
\mathbf{S}	PIOLA-KIRCHHOFF'scher Spannungstensor
t	Zeit
t_A	Auslösezeit
T_0, T_1, T_2	Temperatur
T_{krit}	kritische Temperatur
$T_{krit\ max}$	obere kritische Temperatur

ΔT	Temperaturänderung
T_φ	Schubkraft
u	Verschiebung
\mathbf{u}	Verschiebungsvektormatrix
\mathbf{u}_e	Endverschiebungsgröße
u_k	Verschiebung bei kritischer Last
u_x	Verschiebung in x -Richtung
u_{xmax}	maximale Verschiebung in x -Richtung
$u_{xmax-ana}$	maximale Verschiebung in x -Richtung aus analytischen Berechnungen
$u_{xmax-FEM}$	maximale Verschiebung in x -Richtung aus FEM-Simulationen
u_y	Verschiebung in y -Richtung
Δu	Verschiebungsänderung
u_{MU}	Messunsicherheit
u_{kombi}	kombinierte Messunsicherheit
$U_{M1}, U_{M2},$ U_{M3}, U_S	Spannungssignale
V, V_0, V_2	Volumen
V_{kl}	Volumen infolge instabilen Verhaltens
V_{stabil}	Volumen bei stabilem Verhalten
ΔV	Volumenänderung
$\Delta V_{k1}, \Delta V_{k2}$	Volumenänderung infolge instabilen Verhaltens
w	Einzelmessung
w_1, w_2	Wandstärken am Funktionselement des Entlüftungsventils
W	Verformungsenergiegedichtefunktion
x, y, z	Koordinaten
$\tilde{\alpha}$	Winkel zwischen einem Stab und der x -Achse nach der Verformung
α	Winkel zwischen einem Stab und der x -Achse
α_{hk}	Öffnungswinkel des Harnweg- Katheterventils
δ	Kroneckersymbol
$\boldsymbol{\varepsilon}$	LAGRANGE'scher Dehnungstensor
ε	Dehnung
ε_{log}	Dehnung in logarithmischer Darstellung
ε_θ	Dehnung in θ -Richtung
ε_φ	Dehnung in φ -Richtung
$\varepsilon_{\varphi max}$	maximale Dehnung in φ -Richtung
$\varepsilon_{\varphi max-ana}$	maximale Dehnung in φ -Richtung aus analytischen Berechnungen
$\varepsilon_{\varphi max-FEM}$	maximale Dehnung in φ -Richtung aus FEM-Simulationen
θ	Winkel in der Meridianebene

θ_{max}	maximaler Winkel in der Meridianebene, von der betrachteten Struktur abhängig
κ	Kompressionsmodul
λ	Lastfaktor
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$	Eigenwerte
λ_e	Endlastgröße
λ_s	Streckung
λ_{SP}	Schalenparameter
μ	Querkontraktionszahl
ξ	Störung des Systems
ρ	Dichte
σ	mechanische Spannung
σ_{wahr}	mechanische Spannung in Abhängigkeit vom momentanen Querschnitt
σ_θ	mechanische Spannung in θ -Richtung
σ_φ	mechanische Spannung φ -Richtung
φ_R	Rotationswinkel
χ	Tangentenverdrehung
ψ	Skalierungsparameter
ω	Kreiszahl

Literaturverzeichnis

- Agryris 1978 John H. Agryris et al. Tragverhalten starr ummantelter Schalen. *Forsch. Ing.-Wes. Vol. 44 Nr. 6*, 177-186. 1978
- Alfutov 2000 Nikolaj Anatolevic Alfutov. *Stability of elastic structures*. Berlin u.a.: Springer Verlag. 2000
- BARD 2009 von www.bard.de abgerufen 09.2009
- Bashir-Ahmed 2004 Memon Bashir-Ahmed, Su Xiao-zu. Arc-length technique for nonlinear finite element analysis. *Journal of Zhejiang University SCIENCE*, 618-628. 2004
- Bathe 2002 Klaus-Jürgen Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag. 2002
- Bell 2001 Stephanie Bell. Abeginner's Guide to Uncertainty of Measurement. *Measurement Good Practice Guide No. 11. Issue 2. 2001*. National Physical Laboratory. Teddington, Middlesex, United Kingdom. 2001
- Betten 2004 Josef Betten. *Finite Elemente für Ingenieure 2*. Berlin Heidelberg New York: Springer Verlag. 2004
- Blachut 2010 J. Blachut. Buckling of Compound Spherical — Toroidal Shells under External Pressure. *Proceedings of the 12th International Conference on Engineering, Science, Construction, and Operations in Challenging Environments*. Honolulu. 2010
- Bögelsack 1996 Gerhard Bögelsack. *Patentnr. DE 44 32 253 A 1*. Deutschland. 1996
- Böhm 2006 Valter Böhm. *Bionisch inspirierte monolithische Gelenkelemente mit fluidmechanischem Antrieb*. Ilmenau: Verlag ISLE. 2006
- Budiansky 1959 B. Budiansky. Buckling of clamped shallow spherical shells. *Proc. Symp. On theory of thin elastic shells*. Delft. 1959
- Budiansky 1962 B. Budiansky. Axisymmetric dynamic buckling of clamped shallow spherical caps. Washington: *NASA TN*. 1962
- CADFEM 1999 *Kursunterlagen Schulung "ANSYS Nichtlineare Strukturmechanik"* Grafing: CADFEM GmbH. 1999

- Carl Zeiss Industrielle Messtechnik GmbH 2009 von www.zeiss.de abgerufen 04.2009
- Carlton 1988 E. Sanford Carlton et al. *Patentnr. US 4 758 695*. USA. 1988
- carevent 2009 von www.carevent.de abgerufen 09.2009
- Christen 1998 G. Christen. Nachgiebige Mechanismen - Aufbau, Gestaltung, Dimensionierung und experimentelle Untersuchung. *VDI Berichte Nr. 1423*, 309 - 329. 1998
- Crisfield 1981 M. A. Crisfield. A fast Incremental Iterative Solution Procedure that Handles "Snap-Through". *Comp. & Struct. Vol. 13*, S. 55-62. 1981
- Crisfield 1995 M. A. Crisfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Chichester: John Wiley & Sons. 1995
- Degenhardt 2007 R. Degenhardt et al. Experiments on buckling and postbuckling of thin-walled CFRP structures using advanced measurement systems. *International Journal of Structural Stability and Dynamics Vol. 7 No. 2*, 337-358. 2007
- Dutschke 2005 Wolfgang Dutschke, Claus P. Keferstein. *Fertigungsmesstechnik Praxisorientierte Grundlagen, moderne Messverfahren 5. Auflage*. Wiesbaden: B. G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH. 2005
- Esslinger 1972 Maria Esslinger. Versteifte und abgesetzte Schalen. Stabilitätsuntersuchungen an dünnwandigen Kreiszyklindern unter axial-symmetrischer Belastung. In *Chemie Ingenieur Technik - CIT* (S. 770 - 776). Frankfurt/M: WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim. 1972
- Evkin 1997 A. Yu. Evkin, A. A. Dubichev. Experimental study of symmetric and asymmetric postbuckling modes of spherical shell under external pressure. *International Applied Mechanics Vol. 33 No. 7*, 537-539. 1997
- Festo AG & Co. KG 2008 von www.festo.com abgerufen 02.2008
- Flügge 1957 Wilhelm Flügge. *Statik und Dynamik der Schalen*. Berlin Göttingen Heidelberg: Springer-Verlag. 1957
- Flügge 1990 Wilhelm Flügge. *Stresses in Shells*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag. 1990

- Fried 1984 I. Fried. Orthogonal Trajectory Accession to the Nonlinear Equilibrium Curve. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 47 , S. 283-297. 1984
- Grambow 2002 A. Grambow. *Bestimmung der Materialparameter gefüllter Elastomere in Abhängigkeit von Zeit, Temperatur und Beanspruchungszustand*. Aachen, RWTH Aachen. 2002
- Griebel 2006 Stefan Griebel. *Entwicklung und Untersuchung pneumatisch angetriebener linearer nachgiebiger Aktuatoren nach dem Vorbild der Schneckenentakel*. Ilmenau, TU Ilmenau, Diplomarbeit, 2007
- Gohl 1991 Walter Gohl. *Elastomere - Dicht- und Konstruktionswerkstoffe*. Esslingen: expert Verlag. 1991
- Gupta 2008 N. K. Gupta et al. Experimental and theoretical studies on buckling of thin spherical shells under axial loads. *International Journal of Mechanical Sciences Vol. 50* , 422-432. 2008
- Hampe 1968 Erhard Hampe. *Statik rotationssymmetrischer Flächentragwerke*. Berlin: Verlag für Bauwesen. 1968
- Hadamovsky 1996 Hans-Friedrich Hadamovsky, Dieter Jonas. *Solarstrom - Solarwärme Technik der Photovoltaik und Solarthermie*. Würzburg: Vogel Buchverlag. 1996
- Hadamovsky 2004 Hans-Friedrich Hadamovsky, Dieter Jonas. *Solarstrom Solarthermie*. Würzburg: Vogel Buchverlag. 2004
- Heckenkamp 2007 Christoph Heckenkamp. Zusammenfassung Messunsicherheit. *Vorlesungsskript Physik für Chemische Technologie WS 2007/08*. Darmstadt. 2007
- Heegard 2007 Roger W. Heegard. *Patentnr. WO2007044647*. USA. 2007
- Howell 2001 Larry L. Howell. *Compliant Mechanisms*. New York: John Wiley & Sons, Inc. 2001
- Huang 1964 N. C. Huang. Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells. *Journal of applied Mechanics* 31. 1964
- Johnson 1981 Dudley B. Johnson. *Patentnr. US4254309*. USA. 1981
- Kai-Yuan 1994 Yeh Kai-Yuan et al. Axisymmetric buckling of thin shllow circular spherical shells under uniform pressure for large values

- of geometric parameter λ . *International Journal of Nonlinear Mechanics* Vol. 29 No. 4, 603-611. 1994
- Khusainov 2008 M. A. Khusainov et al. A Cut-Off Thermo-Valve. *Actuator 2008* (S. 895-897). Bremen: HVG Hanseatische Veranstaltungs-GmbH Division Bremen Germany. 2008
- Kinkel 1970 H. Kinkel. *Durchschlaglasten elastisch eingespannter, flacher Kugelschalen unter Außendruck*. Darmstadt: Dissertation. 1970
- Klein 2007 B. Klein. *FEM - Grundlagen und Anwendungen der Finiten-Elemente-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau*. Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlag GmbH. 2007
- Kollár 1975 L. Kollár, E. Dulácska. *Schalenbeulung*. Düsseldorf: Werner-Verlag. 1975
- Krätzig 1985 Wilfried B. Krätzig, Yavuz Basar. *Mechanik der Flächentragwerke*. Braunschweig Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn. 1985
- Labisch 2006 Franz Karl Labisch. On the axisymmetric buckling behaviour of incompressible nonlinear elastic spherical shells. *ZAMM Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 86 No. 7, 572-584. 2006
- Leipholz 1980 Horst H. E. Leipholz. *Stability of elastic systems*. Alphen aan der Rijn: Sijthoff & Noordhoff. 1980
- Linß 2008 Sebastian Linß. *Entwicklung und Untersuchung einer bionisch inspirierten nachgiebigen Struktur mit Saugwirkung*. Ilmenau, TU Ilmenau, Diplomarbeit, 2008
- Mahnert 2010 Ute Mahnert. Tabuthema Inkontinenz. *Sonderbeilage Allgemeiner Anzeiger*, 8 - 9. 2010
- Mair u. Roth 1989 H. J. Mair, S. Roth. *Elektrisch leitende Kunststoffe*. München Wien: Carl Hanser. 1989
- Mattmann 2008 Corinne Mattmann et al. Sensor for Measuring Strain in Textile. *Sensors*, S. 3719-3732. 2008
- Micro-Epsilon Messtechnik GmbH & Co.KG 2007 www.micro-epsilon.de abgerufen 12.2007
- Mirovalve 2009 von www.mirovalve.de abgerufen 09.2009
- Misson 1982 William W. Misson et al. *Patentnr. US4314112*. USA. 1982

- Monolitix 2012 www.monolitix.com abgerufen 12.2012
- Muc 1989 A. Muc. Transverse Shear Effects in Stability of Laminated Shallow Spherical Shells. *Composite Structures vol. 12*. 1989
- Ohsaki 2005 M. Ohsaki, S. Nishiwaki. Shape design of pin-jointedmultistable compliant mechanisms using snapthrough behavior. *Struct. Multidisc. Optim. Vol. 30* , 327–334. 2005
- Öry 2001 H. Öry et al. *Imperfection sensitivity of an orthotropic shperical shell under external pressure*. Aachen, Bremen, Deutschland. 2001
- Pavlovic, D. 2005 Nenad D. Pavlovic, Nenad T. Pavlovic. Rastpolbahn der nachgiebigen Mechanismen. *Proceedings 50. Internationales Wissenschaftliches Kolloquium IWK 2005*. Ilmenau, Verlag ISLE, 2005
- Phoenix 2008 Datenblatt des Herstellers für den Werkstoff IIR-Butylkautschuk, www.compoundinfo.com
- Photron 2008 von www.photron.com abgerufen 10.2008
- Pflüger 1981 Alf Pflüger. *Elementare Schalenstatik*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag. 1981
- Pflüger 1975 Alf Pflüger. *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*. Berlin: Springer Verlag. 1975
- Preuss 2000 R. Preuss, K. Zimmermann. Miniaturgreifer mit opto-thermo-mechanischem Antrieb. *Technische Mechanik Band 20 Heft 4*, 319-327. 2000
- Ramm 1977 Ekkehard Ramm. Zum gegenwärtigen Stand der Stabilität von Kugelschalen unter Einbeziehung von Versuchsergebnissen. In *Seminar über Lineare und geometrisch nichtlineare Schalentheorie einschließlich Stabilitätstheorie* (S. 11.1-11.28). Honnover: Technische Universität Hannover. 1977
- Riks 1972 E. Riks. The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability. *J. Appl. Mech.* 39 , S. 1060-1066. 1972
- Risto 2006 Uwe Risto. *Entwicklung und Aufbau eines pneumatisch angetriebenen Greiferfinger-Aktuators zum Greifen von empfindlichen Teilen*. Ilmenau, TU Ilmenau, Diplomarbeit. 2006
- Risto 2008 Uwe Risto, Lena Zentner. Development and Application of Spherical Shaped Compliant Structures with Snap-Through

- Behaviour. *Proceedings Actuator 2008*. HVG Hanseatische Veranstaltungs-GmbH Division Bremen Germany. 2008
- Risto 2008 Uwe Risto, Lena Zentner. Elastic Structures with Snap-Through Characteristic for Closing Devices. *Proceedings Internationales Wissenschaftliches Kolloquium Ilmenau IWK*. Ilmenau, Verlag ISLE. 2008
- Risto 2010 Uwe Risto, René Uhlig, Lena Zentner. Development of a thermally and pressure controlled valve by using FEM-Simulation. *Proceedings EuroSim 2010*. Prag. 2010
- Risto 2010 Uwe Risto, René Uhlig, Lena Zentner. Thermally controlled expansion actuator for valve applications. *Proceedings Actuator 2010*. HVG Hanseatische Veranstaltungs-GmbH Division Bremen Germany. 2010
- Rohr 1999 Robert D. Rohr. *Patentnr. EP1115621*. USA. 1999
- Schneider 1997 W. Schneider. Verbesserung der Pfadverfolgungsalgorithmen für plastische Durchschlagprobleme mit abruptem Abfall des Tragvermögens. *LACER No. 2*, S. 413-427. 1997
- Seaquist Closures Foreign 1996 Seaquist Closures Foreign *Patentnr. EP 1 426 303 A2*. USA. 1996
- Shahsiah 2003 R. Shahsiah, M. R. Eslami. Thermal and mechanical instability of an imperfect shallow spherical cap. *Journal of Thermal Stresses Vol. 26*, 723-737. 2003
- Shkutin 2001 L. I. Shkutin. Numerical Analysis of Axisymmetric Buckling of Conical Shells *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, Vol. 42, No. 6*, 1057-1063. 2001
- Smith 2008 P. Smith, J. Blachut. Buckling of Externally pressurized prolate ellipsoidal domes. *Journal of Pressure Vessel Technology Vol. 130*. 2008
- Spielmann 2006 C. Spielmann. *Entwicklung eines Sensors für einen ferrofluidischen Flächenaktor*. Ilmenau: TU Ilmenau, Diplomarbeit, 2006.
- Kota 2001 Sridhar Kota. Design of Compliant Mechanisms: Applications to MEMS. *Analog Integrated Circuits and Signal Processing, 29*, 7–15. 2001

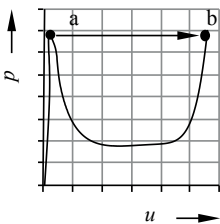
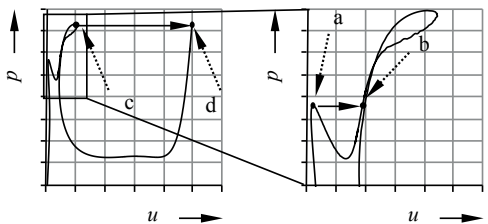
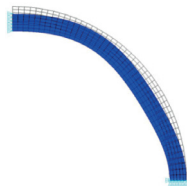

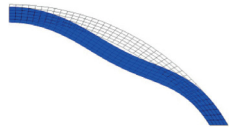
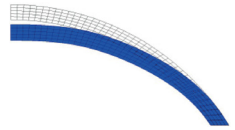
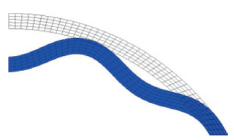

- Sunakawa 1974 M. Sunakawa, Kazuo Ichida. A high precision experiment on the buckling of spherical caps subjected to external pressure. Tokyo: Institute of Space and Aeronautical Science, University of Tokyo, *Report No. 508*. 1974
- Tessendorf 1989 G. Tessendorf et al. *Patentnr. DE3838842*. Deutschland. 1989
- Thurston 1961 G. A. Thurston. A numerical solution of nonlinear equations for axisymmetric bending of shallow spherical shells. *Journal of applied Mechanics* 28. 1961
- Troger 1975 H. Troger. Ein Beitrag zum Durchschlagen einfacher Strukturen. *Acta Mechanica Vol. 23* , 179-191. 1975
- Tucholski 1998 Gary R. Tucholski. *Patentnr. EP 1 016 148 A1*. USA. 1998
- Szyszkowski 1999 W. Szyszkowski, J. B. Husband. Curvature controlled arc-length method. *Computational Mechanics Vol. 24* , 245-257. 1999
- von Kármán 1939 Th. von Kármán, H. S. Tsien. The buckling of spherical shells by external pressure. *Journal of Aeronautic Science*. 1939
- Weinitschke 1965 H. Weinitschke. On asymmetric buckling of shallow spherical shells. *Journal of Mathematic and Physic* 44. 1965
- Wempner 1971 G. A. Wempner. Discret Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids. *Int. J. Solids Struct.* 7 , S. 1581-1599. 1971
- Wessels 1977 M. Wessels. *Das statische und dynamische Durchschlagverhalten der imperfekten flachen Kugelschale bei elastischer rotationssymmetrischer Verformung*. Hannover: Technische Universität Hannover. 1977
- Wriggers 2001 P. Wriggers. *Nichtlineare Finite-Elemente-Methoden*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag. 2001
- Zarutskii 1997 V. A. Zarutskii, V. F. Sivak. Empirical formula for the stability design of shells. *International Applied Mechanics Vol. 33 No. 7* , 532-535. 1997
- Zentner 1999 Lena Zentner. *Patentnr. DE 198 24 622 A 1*. Deutschland. 1999
- Zentner 2000 Lena Zentner. *Patentnr. DE 198 43 739 A 1*. Deutschland. 2000
- Zentner 2004 Lena Zentner. *Patentnr. DE 103 16 959 A 1 2004.11.11*. Deutschland. 2004

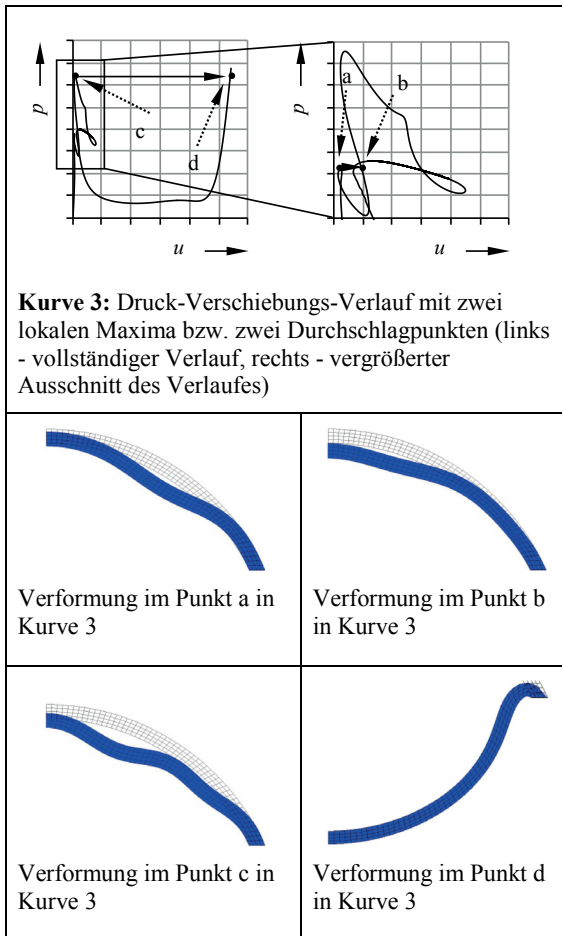
- Zentner 2005 Lena Zentner, Valter Böhm. Zur Anwendung nachgiebiger Mechanismen. *Konstruktion: Zeitschrift für Produktentwicklung und Ingenieur-Werkstoffe* 11/12 , 49-50. 2005
- Zentner 2006 Lena Zentner. *Patentnr. DE 10 2006 008 811 B 3* 2007.07.05. Deutschland. 2006
- Zentner 2008 Lena Zentner, Valter Böhm. Zum Verformungsverhalten nachgiebiger Mechanismen. *Konstruktion: Zeitschrift für Produktentwicklung und Ingenieur-Werkstoffe* 1/2 , 67-74. 2008
- Zienkiewicz 1974 O. C. Zienkiewicz. *Methoden der Finiten Elemente*. Leipzig: VEB Fachbuchverlag. 1974
- Zoelly 1915 R. Zoelly. *Über ein Knickproblem an der Kugelschale*. Zürich: Dissertation. 1915

Anhang A

Signifikante Kurvenverläufe

Tabelle A.1: Übersicht zu den qualitativen Druck-Verschiebungs-Kurvenverläufen, welche bei den untersuchten sphärischen Strukturen auftreten.

 <p>Kurve 1: Druck-Verschiebungs-Verlauf mit einem lokalen Maximum bzw. einem Durchschlagpunkt</p>		 <p>Kurve 2: Druck-Verschiebungs-Verlauf mit zwei lokalen Maxima bzw. zwei Durchschlagpunkten (links - vollständiger Verlauf, rechts - vergrößerter Ausschnitt des Verlaufes)</p>	
 <p>Punkt a in Kurve 1 - Verformung einer Struktur mit Druck-Verschiebungs-Verhalten wie in Kurve 1 im Durchschlagpunkt</p>	 <p>Punkt b in Kurve 1 - Verformung einer Struktur mit Druck-Verschiebungs-Verhalten wie in Kurve 1 nach dem Durchschlagen</p>	 <p>Verformung im Punkt a in Kurve 2</p>	 <p>Verformung im Punkt b in Kurve 2</p>
		 <p>Verformung im Punkt c in Kurve 2</p>	 <p>Verformung im Punkt d in Kurve 2</p>



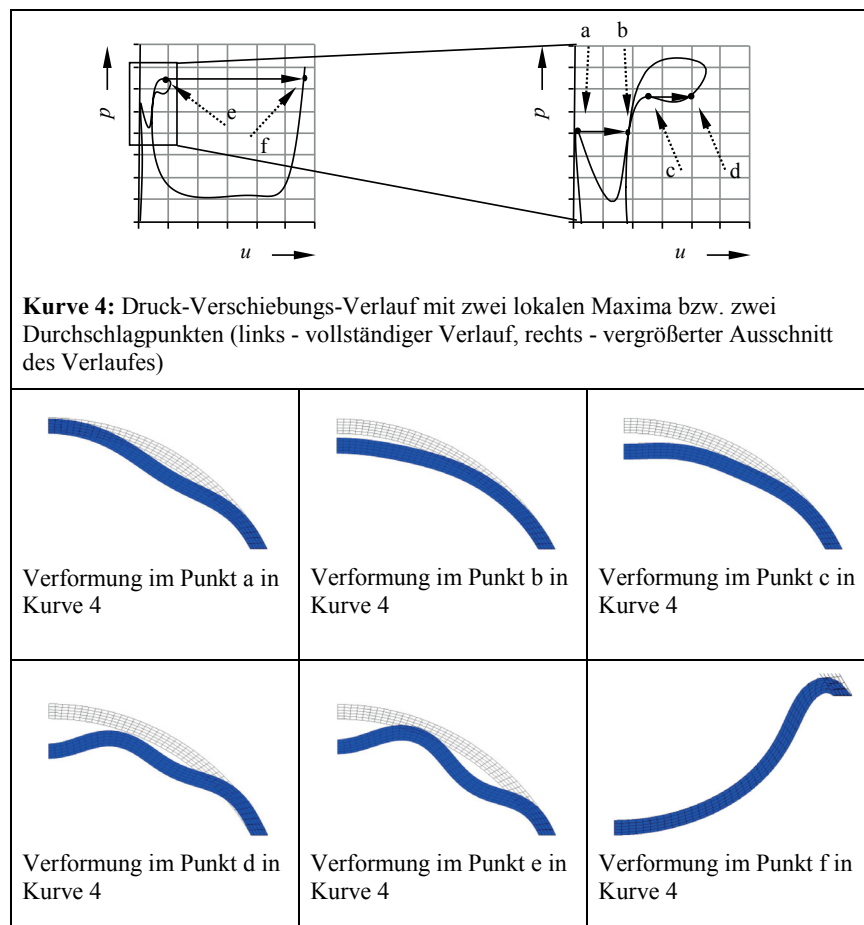


Tabelle A.2: Liste der geometrischen Verhältnisse mit deren Zuordnung zum qualitativen Druck-Verschiebungs-Verlauf aus Tabelle A.1

r/c	6	7	7	8	8	9	9	10	10
h/c	6	6	7	7	8	7	8	7	8
Kurve	4	3	4	4	3	4	3	2	3

r/c	12	12	12	14	14	14	16	16	16	16
h/c	7	8	9	7	8	9	7	8	9	10
Kurve	2	4	3	2	4	3	2	4	3	3

r/c	20	20	20	20
h/c	7	8	9	10
Kurve	2	4	3	3

Alle anderen durchschlagfähigen sphärischen Strukturen zeigen Kurvenverläufe ähnlich wie Kurve Nr. 1. Die Kurven Nr. 2 bis 4 stellen die Last-Verschiebungs-Verläufe dar, die im grünen Bereich in Abbildung 3.16 auftreten und Multi-Durchschlagcharakteristik aufweisen.

Anhang B

Ermittlung der Mooney-Rivlin-Parameter

In Abschnitt 2.2.1 wurde ausführlich der analytische Weg zur Ermittlung der Spannung aus der Verformungsenergieichtefunktion aufgezeigt. Die daraus entstandenen Mooney-Rivlin-Parameter können durch die Analyse von Zugversuchen ermittelt werden. Die Auswertung der Zugversuche befindet sich im Anhang.

Zur Ermittlung der Parameter wurde das Programm ORIGIN verwendet. Dieses Programm ermöglicht das einlesen der Zugdiagramme mit Hilfe von Wertetabellen und stellt die gemessene Kurve grafisch dar. Das Programm verfügt über eine „Curve Fitting“ Funktion, mit der die eingegebene Kurve durch vorher festgelegte Funktionen dargestellt und angepasst werden kann. Für die Ermittlung der Mooney-Rivlin-Parameter wird Gleichung 2.56 nach den Parametern a_{ik} umgestellt, siehe Gleichung B.3, und als „Fit“-Funktion verwendet.

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \quad (\text{B.1})$$

$$I_2 = 2 \cdot \lambda + \frac{1}{\lambda^2} - 3 \quad (\text{B.2})$$

$$\sigma_{11} = 2 \cdot \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \cdot \left[a_{10} + \frac{a_{01}}{\lambda} + 2 \cdot a_{20} \cdot I_1 + a_{11} \cdot \left(\frac{I_1}{\lambda} + I_2 \right) + 2 \cdot a_{02} \cdot \frac{I_2}{\lambda} + a_{21} \cdot \left(\frac{1}{\lambda} \cdot I_1^2 + 2 \cdot I_1 \cdot I_2 \right) + a_{12} \cdot \left(I_2^2 + 2 \cdot I_1 \cdot \frac{I_2}{\lambda} \right) + a_{30} \cdot 3 \cdot I_1^2 + a_{03} \cdot \frac{3}{\lambda} \cdot I_2^2 \right] \quad (\text{B.3})$$

Gleichung B.3 wird im ORIGIN als Fitting- Funktion deklariert. Die Parameter werden vom Programm variiert und der jeweiligen Kurve angepasst und ausgegeben. Die nichtli-

neare Regressionsmethode von ORIGIN basiert auf dem Levenberg-Marquardt-Algorithmus.

Bei der Parameterwahl muss darauf geachtet werden, dass mindestens a_{10} oder a_{01} größer Null sind. Diese Bedingung rührt daher, dass das Mooney-Rivlin-Gesetz grundlegend mit diesen Parametern operiert, also mit einer Ordnung von $m = 1$, denn jede weitere höhere Ordnung dient nur der Verfeinerung der Annäherung. Weiter ist zu sagen dass die Parameter nicht negativ werden dürfen, da der Kurvenverlauf im dritten Quadranten dann nicht mehr dem des biaxialen Druckes entspricht. Das Programm ermöglicht dem Nutzer Grenzen fest zu legen womit ausgeschlossen werden kann, dass ein Parameter negativ wird. Diese Festlegung ist Randbedingung um hinreichend reproduzierbare Ergebnisse zu erhalten.

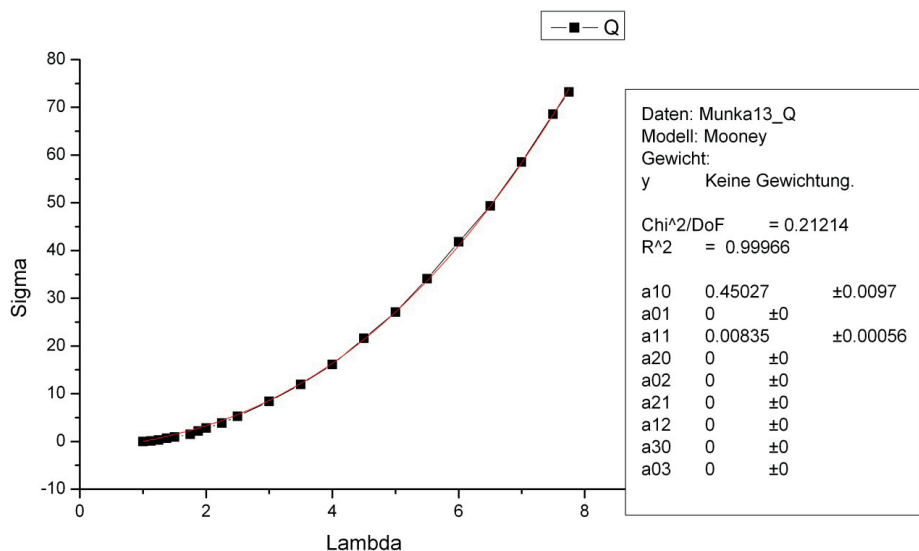


Abbildung B.1: Durch Origin angepasste Kurve für das Material R 420/50 IGET der Firma Wacker. Die gepunktete schwarze Linie stellt die Werte des Zugversuches dar und die rote Linie die angepasste Kurve. Im rechten Fenster sind die ermittelten Parameter und deren Fehler aufgelistet.

Diese Werte sind numerisch ermittelt und müssen auf Richtigkeit überprüft werden, was mit Hilfe eines im ANSYS ebenfalls numerisch simulierten Zugversuches durchgeführt wird. Bei diesem Versuch wird ein 3D-Element an vier Eckknoten (Nodes) gezogen und

an den gegenüberliegenden vier Eckknoten eingespannt. Diesem Element werden die ermittelten Materialparameter zugewiesen. Das Element besitzt die Querschnittsabmessungen (Breite und Dicke) des Zugprüflings aus dem realen Experiment und eine Ausgangslänge von 1 LE. Die Querschnittsabmessungen werden dem Protokoll des realen Zugversuches aus Budapest entnommen. Es wird ein Element eingesetzt welches ein hyperelastisches Verhalten und eine 3 dimensionale Modellierung zulässt. Im vorliegenden Fall wurde das Element Solid185 eingesetzt. Dieses Element verfügt über 8 Knoten mit linearer Formfunktion. Abbildung B.1 zeigt den Aufbau in ANSYS. Die aufzubringende Kraft wird ebenfalls dem experimentell durchgeführten Versuch entnommen und auf vier Nodes aufgeteilt. Nach der Berechnung durch ANSYS wird der Spannungs-Dehnungs-Verlauf ermittelt und mit dem des realen Zugversuchs verglichen. Wenn die errechneten Werte von ANSYS mit denen des realen Zugversuchs bis auf kleine Abweichungen, ca. 5 - 10 %, übereinstimmen sind die Parameter, die durch ORIGIN ermittelt wurden, für die weitere Anwendung nutzbar.

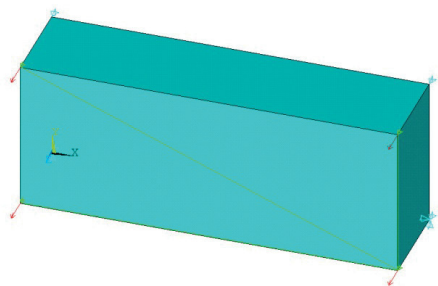


Abbildung B.2: Element für Zugversuch und anliegende Kräfte

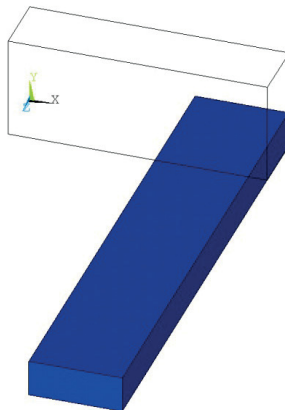


Abbildung B.3: Element nach Zugversuch in verformten Zustand; Silikon R420/50 IGET

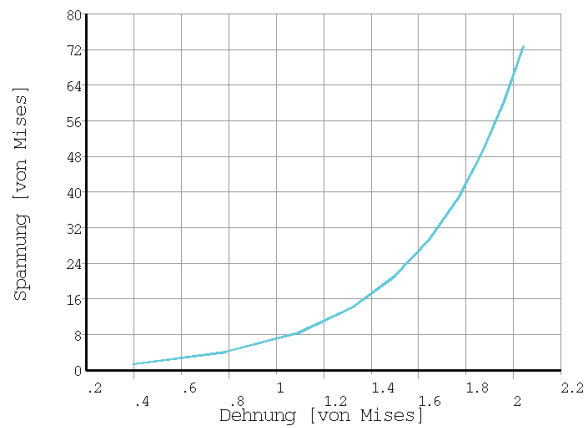


Abbildung B.4: Spannungs-Dehnungs-Verlauf nach simuliertem Zugversuch für R 420/50 IGET

Die ermittelten Spannungen liegen im Bereich der experimentell ermittelten Spannungen, nur die Dehnungen weichen gering von den gemessenen ab. Im vorliegenden Beispiel beträgt die Abweichung ca. 10 %, was in diesem Fall bedeutet dass die Simulation eine geringere Dehnung als der praktische Versuch ermittelt.